Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado

Facultad de Educación

Unidad de Posgrado

Estrategias didácticas para una enseñanza de la matemática centrada en la resolución de problemas. el caso de los estudiantes de "Didáctica de la Matemática III"de la Especialidad de Primaria de la EAP de Educación de la UNMSM

TESIS

Para optar el Grado Académico de Doctor en Educación

AUTOR

Martha María Antonieta RAMÍREZ DELFÍN

ASESOR

Pedro Celso CONTRERAS CHAMORRO

Lima, Perú

2007

Referencia bibliográfica

Ramírez, M. (2007). *Estrategias didácticas para una enseñanza de la matemática centrada en la resolución de problemas. el caso de los estudiantes de "Didáctica de la Matemática III"de la Especialidad de Primaria de la EAP de Educación de la UNMSM*. Tesis para optar grado de Doctor en Educación. Unidad de Posgrado, Facultad de Educación, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

ESQUEMA DEL INFORME FINAL

Título: Estrategias didácticas para una enseñanza de la matemática centrada en la resolución de problemas. El caso de los estudiantes del curso "Didáctica de la Matemática III" de la Especialidad de Primaria de la EAP de Educación de la UNMSM

Graduanda: Martha María Antonieta Ramírez Delfín

Resumen

Introducción

CAPÍTULO I: PLANTEAMIENTO DEL ESTUDIO

1.1. Formulación del problema.
1.2. Objetivos.
1.3. Justificación del proyecto.
1.4. Alcances.
1.5. Formulación de la hipótesis.
1.6. Identificación y clasificación de las variables.
1.7. Condiciones de la población estudiada y de la prueba utilizada.

CAPÍTULO II: DESARROLLO DEL MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes históricos en la investigación sobre resolución de problemas.
2.1.1. El enfoque asociacionista y el método por ensayo y error.
2.1.2. El enfoque de la Teoría de la Gestalt y el pensamiento productivo.
2.1.3. El enfoque de la Gestalt y su influencia en Polya.
2.1.4. La solución de problemas como representación del significado: Ausubel.
2.1.5. La solución de problemas como procesamiento de la información.

2.2. Bases teóricas de la investigación: Elementos en la resolución de problemas.
2.2.1. ¿Qué es y qué no es la resolución de un problema?
2.2.2. Los elementos en la resolución de problemas.
- 2.2.2.1. Las premisas del texto y su significación en el lenguaje usual.
  - a. El lenguaje como barrera del problema
  - b. Normas para la selección y escritura de problemas
- 2.2.2.2. Los términos que expresan conceptos matemáticos
- 2.2.2.3. La base de datos con problemas análogos.
- 2.2.2.4. Las herramientas estratégicas para enfrentar problemas nuevos.
- 2.2.2.5. Las reglas de los procedimientos para la ejecución de algoritmos
- 2.2.2.6. Las reglas para la aplicación del cálculo mental como alternativa al uso de algoritmos.
  - a. ¿Es imprescindible el cálculo algorítmico?
  - b. Los principios del cálculo mental.
    - Principio de analogía
    - Principio de descomposición
    - Principio de distribución
  - c. Las formas de aplicación del cálculo mental.

RESUMEN

Esta tesis presenta una nueva perspectiva de investigación. Hasta los años 80, el mundo de la enseñanza de la matemática aparecía como un sistema de variables interactivas y el propósito de la investigación se limitaba a describir el comportamiento de estas variables, descubrir sus interrelaciones y manipular algunas para provocar cambios en las otras. Esta tesis, sin desdeñar este enfoque trata de complementarlo, postulando un tipo de investigación en educación matemática donde el investigador juegue un papel más activo para ayudar a profesores y alumnos a resolver el problema planteado.

En nuestro caso encontramos en los profesores de primaria serias dificultades para resolver problemas que corresponden al currículo nacional del 5º y 6º grado de primaria. Para plantear un criterio de solución al problema, nuestra tesis presenta y fundamenta la aplicación de un programa de estrategias didácticas para formar profesores de primaria que puedan desarrollar en el aula escolar de 5º y 6º grado, una enseñanza de la matemática centrada en la resolución de problemas. Estas estrategias se han aplicado paso a paso en un detallado programa diseñado y elaborado en 13 capítulos de un fólder grabado en DVD para el Curso "Didáctica de la Matemática III".

El programa ha procurado abarcar los distintos campos conceptuales de problemas con el propósito de demostrar en primer lugar como puede funcionar en el aula de 5º y 6º grado, una didáctica centrada en la resolución de problemas.

En segundo lugar hemos tratado de evaluar el grado de asimilación de estas estrategias en nuestros estudiantes de pre-grado matriculados en los cursos de "Didáctica de la Matemática III". Este segundo objetivo, en torno a la asimilación de las estrategias, es en realidad secundario en relación a nuestro principal interés que radica en presentar y describir nuestro programa de estrategias didácticas, desarrollado en las aulas escolares de 5° y 6° grado, como un sistema consistente y completo, fundamentado en una concepción didáctica que posibilita el desarrollo de un currículo de matemática adecuado para niños del 5º y 6º grado. La viabilidad de tal método ha sido comprobada por la misma prueba aplicada también a los alumnos de 5º S y 6º S del Colegio Peruano-Alemán "Alexander von Humboldt" después de una intensiva preparación con esta metodología.

En el caso de los estudiantes universitarios, hemos trabajado con los alumnos de la Base 2003 de la Especialidad de Primaria de la EAP de la Facultad de Educación de la UNMSM que han seguido "Didáctica de la Matemática I" en el 2004, "Didáctica de la Matemática II" en el 2005 y finalmente el curso "Didáctica de la Matemática III" en el 2006. También hemos trabajado con los alumnos de la Base 2002 de la misma especialidad, que han recibido "Didáctica general de la Matemática" en el 2004, en el cual desarrollaron la didáctica de la matemática de 1° a 4° grado y que completaron su formación con el curso "Didáctica de la Matemática III" para desarrollar la didáctica de 5° y 6° grado en el verano del 2007.

Como grupo de control han participado 72 estudiantes de la Especialidad de Primaria de la Universidad Nacional de Educación "Enrique Guzmán y Valle" de los ciclos 7º y 9º, que han recibido dos cursos de Didáctica de la Matemática con otra metodología, para probar por contraste, la superioridad de las estrategias que plantea nuestro curso y su influencia en la resolución de problemas.

Introducción

Cuando hace dos años desarrollamos la tesis de magíster lo hicimos desde una perspectiva cognitivo-constructiva porque nos situamos en el curso Didáctica de la Matemática I destinado a formar estudiantes en estrategias para la enseñanza del cálculo mental en el 1º y 2º grado, pero este 2006, que desarrollamos el curso "Didáctica de la Matemática III" destinado a formar profesores para el 5º y 6º grado, nos pareció oportuno ensanchar los horizontes del curso investigando en nuestra tesis de doctorado, el enfoque problémico desde una perspectiva que centra el desarrollo de la clase de matemática y el aprendizaje de los conceptos seleccionados en la resolución de problemas.

Al iniciar nuestro trabajo nos preguntamos ¿qué es un problema matemático? En primer lugar hemos respondido desde una perspectiva histórica que se inicia con el asociacionismo, la Gestalt y Polya, continúa desarrollándose con Bruner, Ausubel y los procesadores de la información y culmina con el nuevo enfoque problémico, una de cuyas vertientes nos ha servido como punto de partida para nuestro marco teórico. En segundo lugar hemos contestado a la pregunta ¿qué es un problema?, analizando los elementos que intervienen en la resolución de un problema matemático escolar. Entre éstos, nos hemos detenido a analizar el manejo de los textos en el lenguaje usual, necesario para una traducción adecuada al lenguaje matemático, los conceptos matemáticos implicados, los modelos conocidos que forman parte del bagaje escolar y que constituyen una base de datos, las estrategias creativas para afrontar problemas que implican novedad, los algoritmos necesarios para resolver problemas y por último, el cálculo mental como herramienta que nos permite un manejo ágil y eficiente de las operaciones planteadas. Como dicen los defensores del cálculo mental, *un buen problema aritmético escolar es aquél que no le da ventaja a un estudiante por el simple hecho de contar con una calculadora de bolsillo.*

Aclarada la discusión sobre el concepto de problema matemático, tanto desde la perspectiva histórica como desde la perspectiva metodológica contemporánea, en el capítulo siguiente analizamos los pasos recomendados para la solución de un problema, planteando nuestro punto de vista sobre el tema. Para hacerlo nos situamos en la perspectiva macro de un "resolutor ideal" que trata de lograr un proceso integral y racional de solución. Para nosotros es fundamental investigar este proceso para mejorar la enseñanza de problemas en nuestro medio, puesto que nuestro objetivo final es contribuir a elevar la demanda cognitiva de la clase de matemática, tanto a través del trabajo con problemas como de ejercicios que exijan una buena dosis de razonamiento inferencial y analógico.

Por este motivo, pretendemos a través de nuestro curso formar profesores que sean capaces de centrar la clase de matemática de 5º y 6º grado en la resolución de problemas y como paso inicial presentamos en cada unidad del fólder de trabajo una selección y construcción elaborada de problemas para introducir cada concepto a través de casos que planteen un reto motivador al estudiante. En segundo lugar, les proponemos desarrollar el dominio de las técnicas de cálculo mental y los algoritmos con ejercicios que permitan al escolar aprender descubriendo novedosas estrategias de trabajo en lugar de una rutina repetitiva y monótona. En tercer lugar, presentamos problemas de desarrollo y aplicación del concepto, de mediana complejidad, que impliquen el uso de estrategias creativas cuyo manejo requiere cierto entrenamiento constante en el tiempo.

Tal vez el curso de 60 horas en el primer grupo y de 48 horas en el segundo grupo, no haya sido suficiente para lograr nuestro objetivo de formar a todos los estudiantes, de modo que podamos asegurarles un total dominio sobre el uso de estas estrategias, porque finalmente creemos que un conocimiento aceptable de conceptos y estrategias, sólo puede alcanzarse con la práctica continua y el tiempo de experiencia en el aula y que lo en realidad hemos logrado, sin duda, es un análisis de los conceptos priorizados y una presentación de las herramientas que han de aprender a usar en el futuro, cuando enfrenten día a día el reto de enseñar matemática en el aula.

Enseñar a manejar las estrategias para resolver problemas en el aula nos parece fundamental en nuestro medio, puesto que nuestros escolares tienen un rendimiento muy bajo en este aspecto, principalmente porque adolecen de conducción adecuada para abordar la resolución de problemas matemáticos de nivel elemental. Ésta es una lamentable ausencia sobre todo porque el problema matemático es el instrumento ideal para generar el desarrollo de las capacidades de argumentación, creatividad en el empleo de estrategias y matematización de la realidad. Al referirnos a la matematización consideramos integrable no sólo la realidad observable en la vida cotidiana sino también los temas que nos plantean los problemas de trabajo interdisciplinario especialmente en relación a las ciencias naturales y sociales e incluso a otros ámbitos de la cultura como el arte. Por todo ello, nos parece un objetivo fundamental el asumir una investigación sobre la enseñanza de la matemática basada en problemas.

Finalmente, debemos afirmar que este trabajo recoge nuestra experiencia como profesora de matemática en las aulas de 5º y 6º grado del Colegio Peruano-Alemán “Alexander von Humboldt” durante los últimos 20 años. Nuestra intención en el aula escolar es y ha sido siempre, utilizar el problema como recurso de aprendizaje para generar un clima de interés donde los alumnos en interacción con sus compañeros, desarrollen juntos un proceso de resolución compartido. Pretendemos que mientras lo intenten, descubran o completen aspectos de los conceptos matemáticos seleccionados y se valgan unas veces de procedimientos ya asimilados a través del razonamiento analógico y otras veces, frente a situaciones nuevas, de estrategias basadas en la representación mental y gráfica que exige creatividad. Sostenemos que de esta manera, los alumnos adquieren nuevas estrategias de solución que más tarde aplicarán para resolver por analogía. Creemos que a través de esta búsqueda incesante, el razonamiento matemático de los niños se desarrolla por el constante incremento de las nuevas estrategias incorporadas. Simultáneamente los conceptos adquiridos, que enriquecen progresivamente su pensamiento, se van cimentando cada vez mejor porque con cada problema nuevo, ellos tienen la oportunidad de conocer una nueva arista del concepto seleccionado.

Por eso, pensamos que nuestro principal aporte en esta tesis ha sido proporcionar al estudiante y al maestro, una selección priorizada de los conceptos para trabajar a través de problemas y a la par, esas herramientas creativas que hemos observado que algunos niños han aprendido a usar con destreza, y que los han ayudado en la resolución no rutinaria de problemas. Esperamos que nuestros estudiantes del curso hayan llegado a asimilar esos conceptos y esas estrategias para que pierdan el temor de trabajar con problemas, y sean capaces de contribuir significativamente en la mejora de la calidad de la educación matemática que se imparte en nuestras aulas, porque sólo de ese modo, tendremos los escolares con criterio y madurez intelectual que tanto anhelamos.

Capítulo I
Planteamiento del estudio

1.1. Formulación del problema

Un porcentaje apreciable de alumnos de pre-grado llegan a seguir cursos de la Especialidad de Primaria sin haber desarrollado su capacidad de resolver problemas matemáticos. Esto se pone en evidencia cuando participan explicando su proceso de solución a problemas planteados en clase y más aún, cuando deben preparar sus clases durante la práctica docente. Tal situación proviene de la selección que se realiza en la universidad basada en una prueba objetiva que los alumnos contestan por descarte y otras técnicas aprendidas para aprobar el examen de ingreso que no garantiza que posean un buen nivel de razonamiento matemático. Esta situación confirma, lo que sostienen recientes estudios de investigación: que el tipo prueba de selección aplicada hasta el 2004, no tiene una validez predictiva confiable y que existe la necesidad de optimizarla. Ahora bien, cuando se ha tratado de cambiar el tipo de prueba durante el periodo 2005-2006, aunque la intención ha sido loable, el resultado ha sido desalentador pues en lugar de cubrirse las 30 vacantes para primaria apenas se han cubierto 13[1] y esto no garantiza un número adecuado de alumnos para llevar a cabo el desarrollo completo del programa durante 5 años pues posiblemente en el último año queden menos de 10. Simplemente tenemos que aceptar que los postulantes que han desarrollado un alto nivel de razonamiento matemático en nuestro medio y que son expertos en la resolución de problemas matemáticos, no consideran entre sus metas, el dedicarse a la enseñanza en la escuela primaria puesto que sus expectativas profesionales van mucho más allá y por lo tanto, si nos esmeramos en seleccionar adecuadamente a estudiantes con alto nivel de razonamiento matemático no contaremos con un número suficiente para cubrir las vacantes de un programa de la Especialidad de Primaria. En consecuencia, estamos destinados a recibir para nuestra especialidad un buen número de estudiantes novatos en la resolución de problemas escolares de nivel elemental[2] y es necesario proponer una metodología para trabajar arduamente con ellos para convertirlos en expertos, lo que según nuestros resultados, no siempre es posible en el total de los casos.

Para salir de esta situación y recibir postulantes con las condiciones ideales tendría que cambiar la política del Estado y ofrecer a los ingresantes a la carrera magisterial estatal, nuevas condiciones laborales en base a los méritos personales. Pero nada de esto es fácil de lograr, cuando hay 110 000 maestros excedentes y además 30 000 nuevos egresados cada año[3], que pugnan por ingresar al sistema, ejerciendo todo tipo de presiones sociales que dificultan una adecuada selección.

De modo que con frecuencia, ingresan y seguirán ingresando al sistema estatal, profesores de primaria que no han alcanzado un nivel de razonamiento matemático adecuado al grado en que trabajan con gran perjuicio para los alumnos a su cargo.

---

[1] Según el informe de la EAP de Educación este número corresponde a los matriculados que también provienen de ingreso directo o través del sistema de ingreso por la Academia Pre-Universitaria.
[2] Nos referimos a los seis grados de Primaria y a los dos primeros años de Secundaria.
[3] De los 30 000 alumnos, 6 800 pertenecen a las Universidades y 23 200 a Institutos Pedagógicos. CNE "La carrera del maestro" Ministerio de Educación, 2006.

En nuestra opinión, el problema parte de la selección inicial de los estudiantes a la carrera de Educación Primaria. Esta situación es una de las paradojas de nuestro sistema educativo, porque son precisamente estos estudiantes carentes de pericia en la resolución de problemas matemáticos de nivel elemental, los primeros que ya graduados como docentes en ejercicio enseñarán al niño a "**matematizar**" la realidad para conocerla y dominarla, los que le servirán de modelo para "**argumentar**" y dar soluciones fundamentadas y lo más grave, son ellos quienes tendrán que demostrarle como "**ser creativo**", proporcionándole modelos de estrategias creativas además de otras técnicas de cálculo mental y algorítmico para enfrentar con éxito la resolución de problemas.

La Evaluación Nacional del 2002, donde se presentaron alrededor de 30 000 maestros de Primaria confirma esta situación.[4] Sin duda, la mayoría de los profesores cuando fueron estudiantes de la especialidad, no llegaron a dominar los conceptos básicos y las estrategias para enfrentar con éxito la resolución de problemas de nivel elemental correspondientes al 5º y 6º grado, cuya enseñanza culmina en realidad en el Iº y IIº de secundaria.

En general, esta situación se explica porque el problema de nivel de conocimiento matemático de gran parte de los egresados de la secundaria, es muy serio. La Unidad de Medición de la calidad del Ministerio de Educación (UMC) en su último informe sostiene que apenas el 2.9% de los estudiantes de 5º de secundaria han alcanzado las competencias para su grado en el nivel suficiente, solamente un 11% alcanza el nivel básico, es decir un nivel de desarrollo insipiente, 17,7% se sitúa en el nivel previo y un 68,4% se encuentra por debajo del nivel previo.

De modo que tenemos un 13,9% que por lo menos están en el nivel básico frente a un 86,1% que aún se encuentra por debajo de ese nivel. Si analizamos este último grupo el 17,7% están en el nivel correspondiente a grados anteriores pero el 68,4% ni siquiera puede resolver todas las tareas del nivel previo. Entre estos últimos tenemos un 51% que puede resolver situaciones problemáticas sencillas y rutinarias de tipo comercial con las operaciones aritméticas básicas, identificar formas y figuras geométricas, leer cuadros sencillos de información estadística y calcular el promedio de un conjunto pequeño de números naturales. Pero también tenemos un 17,4% que sólo realizan parcialmente algunas de estas tareas y que es inexplicable que se encuentren cursando el 5º de secundaria.

¿Cómo se explican estos resultados en 5º de secundaria? Hay que tener en cuenta que nuestros estudiantes son el producto final de una escuela que no ha tenido un programa constante y sostenido en la enseñanza de la matemática, especialmente en lo que se refiere al trabajo con los conceptos básicos y a las competencias específicas de cada grado como base para lograr el desarrollo de la capacidad de resolución de problemas.

Lamentablemente, a nivel latinoamericano se dan situaciones similares. Nuestra escuela, como afirma la destacada investigadora uruguaya, Mónica Pena, no ha considerado dos factores que emergen como conclusiones de la investigación educativa en los últimos veinte años:

[4] Piscoya, Luis. Cuánto saben nuestros maestros. UNMSM, Lima, 2005

a) La larga duración y la lentitud relativa del proceso de formación de conceptos y competencias matemáticas que obliga a un esfuerzo constante y sostenido en un largo período de tiempo durante toda la primaria y secundaria.

b) La gran heterogeneidad que existe entre los alumnos de una misma clase con respecto al desarrollo de este proceso de aprendizaje necesario para resolver problemas y que obliga al análisis de las dificultades de los diversos grupos de estudiantes y a la necesidad de brindar herramientas de apoyo. [5]

Como resultado de nuestra enseñanza secundaria, superficial e inconstante en el tiempo e inadecuada en sus planteamientos y acciones para enfrentar la heterogeneidad, los alumnos que nos llegan a la universidad para enseñar matemáticas en primaria, no han llegado a desarrollar plenamente su capacidad de analizar problemas. ¿Por qué ocurre esta situación paradójica? ¿Cómo solucionar este grave inconveniente? Al margen de la cuestión de la selección inicial que enfrentamos por la baja expectativa profesional de la carrera docente, tratemos de ahondar en otras causas que puedan explicar por qué tocan nuestras puertas alumnos con tales deficiencias.

1) En primer lugar como ya sugerimos por la evaluación de la UMC se trata de un problema de **formación en conocimientos matemáticos** básicos. Los estudiantes tienen un pobre conocimiento de los conceptos matemáticos porque las escuelas secundarias no les proporcionan la base y esto les impide tener los conceptos precisos como premisas básicas para la resolución de problemas.

   Ciertamente una buena preparación en secundaria es la antesala para una adecuada formación docente. Como dice el investigador Martin Carnoy: "Los profesores cubanos de escuelas primarias tienen un alto conocimiento de las asignaturas, especialmente de matemáticas, gracias al alto nivel de matemática que recibieron en la secundaria. A esto se le puede llamar el efecto del **círculo virtuoso.** Los estudiantes salen mejor preparados respecto al conocimiento de las distintas materias, de modo que cuando se convierten en profesores, son capaces de enseñar un currículo más exigente."[6]

   Por otra parte, el sistema cubano no abandona al docente graduado y presenta una mayor organización y control central de los contenidos, conocimientos y formación de los profesores. Hay quienes piensan que el sistema cubano exagera en el control al docente pero tal vez ésa es la razón de su éxito puesto que un control estricto tiene aspectos positivos. En nuestro caso, estábamos en el extremo opuesto, no había seguimiento que representase ayuda al profesorado en el desarrollo de un currículo, que día a día se torna más complejo[7]. Más bien existía y aún existe la concepción que la observación al profesor por parte de los coordinadores o de las autoridades es interferencia en su labor puesto que con frecuencia se le critica y sanciona pero no se le ayuda. La sala de clase resulta como dice Carnoy "el santuario del profesor" y en la mentalidad del docente, la intervención de un consejero resulta adecuada sólo para practicantes.

---

[5] Pena, Mónica. El problema. Homo Sapiens Ediciones. Rosario, 2003

[6] Carnoy, Martin. "Mejoramiento y equidad en el sistema educativo: ¿mayor eficiencia o expansión del sistema?" Revista Educación de la Facultad de Educación de la UNMSM, año 1, nº 2, diciembre 2004.

[7] Actualmente el Programa de Capacitación Permanente está ensayando el sistema de monitoreo.

Esperemos que después de los informes de la UMC y del lanzamiento del nuevo Programa de Capacitación Permanente se inicie un cambio de mentalidad y que los profesores que acudieron a la Evaluación Docente en enero del 2007, obtengan algún provecho del sistema de monitoreo y de los talleres programados, especialmente en el desarrollo curricular del área de matemática.

2) En segundo lugar se trata también de un problema de **formación metodológica.** La escuela no ha formado a estos estudiantes en la práctica de ágiles y adecuadas estrategias para la resolución de problemas porque sus maestros tenían las mismas carencias que hoy presentan ellos y la cadena se repetirá indefinidamente si no implementamos un programa formativo de una metodología adecuada. La escuela en la mayoría de los casos, ha formado y sigue formando estudiantes que memorizan algoritmos sin comprender su significado y las posibilidades de una aplicación interesante en el mundo real o en las otras disciplinas. La escuela no se ha detenido en el análisis de conceptos ni ha proporcionado al estudiante suficiente número de casos expresados en problemas seleccionados para plasmar con claridad el concepto matemático.

3) En tercer lugar se trata incluso de un asunto de **temor y frustración.** Los estudiantes albergan temor a los problemas porque no están habituados a enfrentarlos y sienten que éstos los conducen fuera de la rutina algorítmica, rutina mecánica a la que están acostumbrados y por otro lado, son concientes que los problemas exigen aplicación de estrategias creativas y otras capacidades que no han desarrollado. Por tanto, aparte de optimizar la selección del alumno de la Especialidad de Primaria, se requiere el desarrollo de un programa de conceptos y procedimientos básicos de matemática, previo a los cursos de Didáctica de la Matemática, para iniciar una formación más exigente, pero basada en las condiciones reales del alumno.

   Tengamos en cuenta, que habiendo un 86% de alumnos que no han llegado al nivel básico al egresar de 5º de secundaria, no podemos exigir condiciones ideales sin subsanarlas. Sobre todo porque como universidad nacional recibimos gran parte de esos alumnos y ciertamente de nada sirve hacerles exigencias que superen los niveles de su propia formación pues esto sólo les producirá mayor temor y ansiedad.

4) Pero también se trata de un asunto de **tergiversación y encubrimiento.** Muchos de nuestros estudiantes resolvieron en la escuela problemas que no eran realmente problemas porque no presentaban obstáculos sino soluciones inmediatas donde el alumno no esforzaba su capacidad de razonar. Se hace necesario aplicar un programa de nivelación con problemas que realmente sean "el obstáculo" a partir del cual se desarrolle la capacidad de razonamiento. Pero dado que el nivel inicial es bajo, para trabajar con los alumnos actuales, se debería abarcar desde los problemas simples de recuperación hasta llegar al nivel en que los problemas son realmente problemas y estimulan el desarrollo del razonamiento lógico. No hay que encubrir la situación ignorándola, hay que verificar el nivel de cada alumno y proporcionarle ayuda a partir de su propio nivel y ritmo de asimilación.

5) Se trata también entre otras cosas de un problema de índole **socio-cultural.** Los estudiantes están inmersos en una sociedad que no valora el razonamiento creativo en el área de ciencias y que es además refractaria a estimular el conocimiento científico. El joven que estudia matemática es un "nerd" sin remedio y el que aplica la matemática para comprender el mundo que nos rodea, pierde su tiempo porque quien se dedica a ese tipo de estudios en el Perú "se muere de hambre". Se hace necesario una política educativa para revalorizar el papel de la matemática en el aprendizaje de la ciencia y la comprensión del mundo que nos rodea no sólo a través de discursos. Paralelamente, es necesario iniciar una política de estímulos no sólo para valorar en su justa medida al docente universitario que se dedica tanto a la investigación científica como a la docencia sino también para recompensar al docente escolar que se esmera por mejorar la enseñanza de la matemática tanto en la escuela secundaria como en la primaria. En Colombia, por ejemplo, existen premios de estímulo a los maestros escolares que presentan experiencias innovadoras que son entregados por el mismo Presidente de la República en una ceremonia especial.

   Últimamente en nuestro medio, han surgido una serie de concursos de matemática que convocan a los mejores alumnos con sus profesores, premiando la dedicación intensiva al estudio de la matemática en el nivel escolar y que podrían representar una sana y estimulante competencia. Sin embargo, el tipo de cuestionario de respuesta múltiple, estimula la solución por descarte, cuando no por azar, y a la vez no permite destacar la evaluación del proceso de resolución del problema que sería lo interesante. Por otro lado, no contiene problemas de actualidad como los que se presentan en las Evaluaciones de Pisa, y en este sentido, no colabora con la tarea de matematizar y establecer relaciones interdisciplinarias. Pero lo más grave de este tipo de cuestionario, en el caso de 5º y 6º de primaria, es que plantean contenidos que el currículo desarrolla en grados posteriores, ocasionando que los alumnos aprendan de memoria procedimientos algorítmicos que aún no han comprendido, transformándose así en resolutores mecánicos. Por todo ello, se requiere un nuevo tipo de evaluación para el nivel de Primaria, para que ésta no termine siendo, una mala copia de los antiguos exámenes de ingreso a la universidad que se tomaban hace 20 años y que hoy ya están evolucionando.

   A pesar de lo expuesto, estos concursos son el estímulo más difundido para premiar a los estudiantes que se dedican al estudio de la Matemática y aunque su auspicio corre por cuenta de las editoriales y de las instituciones educativas, que se benefician con su gestión, no por eso dejan de tener relevancia como impulsadores de una política para mantener activo el interés por el estudio. Existen también algunos intentos, de parte del Estado, para impulsar concursos de matemática oficiales para los estudiantes pero lamentablemente la falta de recursos sigue impidiendo su normal desenvolvimiento.

   Paralelamente, también es necesario que el Estado estimule la labor docente del profesor de matemática de primaria. Para los profesores, uno de los mejores estímulos ha sido la selección de docentes calificados de primaria, con experiencia en capacitación docente, para trabajar en talleres y en el monitoreo de profesores de aula, dentro del marco del Programa Nacional de Capacitación Docente, según convenio suscrito con el MED con cada universidad nacional.

6) Se trata asimismo de un **problema de vocación pedagógica.** El maestro de matemáticas no sólo tiene que saber resolver problemas como el matemático, el maestro de matemáticas tiene que ser capaz de entender “el porqué los alumnos no entienden” y tiene que llegar a sentir verdadero gusto por la enseñanza de esas herramientas estratégicas que permitirán a sus alumnos plantear y resolver las situaciones problémicas. Por lo tanto, un programa de enseñanza de estrategias para resolver problemas debería incluir un análisis de las dificultades que enfrentan los alumnos al resolver problemas y el cómo atenderlas para fomentar la “vocación didáctica del maestro”, que se deber cultivar con esmero durante toda la formación del estudiante.

   Ahora bien, aparte de la “vocación didáctica” que se requiere para enfrentar con éxito la heterogeneidad, saberla enfrentar supone el desarrollo personal de una técnica del maestro en ejercicio que requiere plena dedicación y preparación permanente. Enfrentar la heterogeneidad requiere tanto de vocación como de preparación porque sabemos que no todos los alumnos inician el análisis de problemas al mismo tiempo, unos requieren motivación para concentrarse, comenzar a leer e interesarse por el tema, otros requieren ayuda técnica para la comprensión lectora. Al respecto sabemos que los niveles de comprensión lectora son disímiles, mientras unos niños tienen un léxico y una comprensión sintáctica adecuada, otros que leen mecánicamente, tienen gran dificultad en comprender lo que leen. Por último, sabemos que no todos los alumnos captan la estructura de un problema matemático con la misma facilidad y velocidad pues existen diferentes niveles de asimilación de los conceptos matemáticos: unos estudiantes requieren pistas que el maestro debe estar preparado para proporcionar, sin por ello adelantar la respuesta, mientras otros que analizan y resuelven con facilidad, exigen una pronta corrección y al mismo tiempo, demandan una nueva y estimulante tarea. Si no disponemos de recursos estratégicos y variedad de materiales para atender las diferencias individuales, no lograremos resultados aceptables. Sin vocación y sin preparación permanente, la heterogeneidad del alumnado definitivamente no puede enfrentarse con el éxito que esperamos.

7) Finalmente se trata, como sugiere la investigadora Mónica Pena de un **problema de constancia en el tiempo**. Los maestros aplican problemas en periodos cortos de tiempo cuando es necesario realizar un programa más extenso para darle sentido a los conceptos porque “un concepto adquiere su sentido en función de la multiplicidad de problemas a los cuales responde”.[8] Por ejemplo, el niño sólo podrá construir el sentido de la adición y la sustracción si entra en contacto con una gran variedad de situaciones que necesitan de estas operaciones para su resolución. Esta variedad sólo puede ser desarrollada en su totalidad a lo largo de un período prolongado en la escuela que se inicia en el periodo pre-escolar y culmina hacia el sexto grado. El estudiante de pre-grado debe ser conciente de las dificultades que enfrenta un niño y sobre todo debe saber que la adquisición de conceptos que él como adulto puede asimilar en tiempo relativamente breve, le demandará al niño una inversión mucho mayor de tiempo, si realmente persigue lograr una maduración progresiva del concepto y no un mero aprendizaje superficial y memorístico.

---

[8] Vergnaud. Teoría de los campos conceptuales. Cit. por Mónica Pena. El problema. Ed. Homo Sapiens. Santa Fé. Argentina, 2003. P. 9

En conclusión, los alumnos egresados de la secundaria que recibimos para formar como docentes de primaria no han desarrollado plenamente su propia capacidad de resolver problemas matemáticos por las múltiples razones ya expuestas y urge implementar con ellos un programa que los ayude a mejorar su propio nivel de análisis y resolución de problemas, aunque sólo fuese para profundizar conceptos y estrategias a nivel del 5º y 6º grado.

1.2. Objetivos del proyecto

Considerando el problema planteado, esta tesis se propone:

1) Desarrollar la capacidad de los estudiantes de la Especialidad de Primaria de la EAP de la UNMSM para analizar problemas del currículo de 5º y 6º grado, ofreciéndoles una formación basada en el **Método de la clase centrada en problemas**, producto de nuestra experiencia en las aulas del Colegio Humboldt durante los últimos 20 años.[9]

2) Fundamentar este método presentando en el curso:

    a) Los elementos que intervienen en la resolución de problemas

    b) Los pasos para el análisis y la resolución de un problema

    c) Las estrategias para analizar problemas nuevos en los campos de la lógica, numeración, operaciones con naturales, divisibilidad, fracciones, decimales, proporcionalidad, porcentaje y por último geometría constructiva.

    d) Un análisis detallado de la Teoría de los campos conceptuales aditivo y multiplicativo, documentado con ejemplos de los diferentes tipos de problemas estándar que encontramos en cada clase.

3) Fundamentado **el método de la clase centrada en problemas**, que es nuestro objetivo teórico principal, el objetivo experimental de la tesis consiste en probar si la metodología propuesta tiene un impacto en el rendimiento en la resolución de problemas de los estudiantes y si este impacto es significativo.

    Para tal propósito, tomamos una prueba pre-post a todos los estudiantes del grupo experimental que cursaron “Didáctica de la Matemática III” de la Especialidad de Primaria de la EAP de Educación de la UNMSM, de las bases 2002 y 2003, donde aplicamos nuestro método y paralelamente la misma prueba por única vez, a nuestro grupo de control, formado por 72 estudiantes del 7º y 9º ciclo de la Especialidad de Primaria de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Educación Enrique Guzmán y Valle[10], a fin de analizar los resultados y contrastarlos.

[9] Esta metodología ha sido aplicada también por otras profesoras de colegios nacionales y particulares que han sido nuestras alumnas en los cursos de capacitación que paralelamente hemos desarrollado.
[10] Estos alumnos ya habían llevado todos los cursos de Matemática y Didáctica de la Matemática, que se proponían en su plan de estudios, aunque su metodología era diferente como ya explicaremos.

1.3. Justificación del proyecto

Siempre se ha considerado que existe una alta correlación entre nivel intelectual alcanzado y éxito en el aprendizaje de la matemática pero lo que las investigaciones actuales demuestran es que la correlación es más alta cuando se trata de correlacionar nivel intelectual y resolución de problemas. En efecto, al resolver problemas, exigimos contenidos de alta demanda cognitiva porque al abordarlos, desarrollamos nuestra capacidad de deducir, argumentar y conjeturar e incluso desarrollamos nuestra capacidad de matematizar la realidad, es decir de analizarla a través de estructuras matemáticas, traduciendo con símbolos del lenguaje formal una estructura que apreciamos en el mundo real, gran parte de las veces a través del lenguaje usual. Aunque muchas veces tenemos estructuras modelo de las cuales nos valemos para resolver un problema, en ocasiones nos enfrentamos a conceptos y estructuras nuevas que nos demandan creatividad.

De modo que el presentar un programa de matemática para 5º y 6º grado centrado en la resolución de problemas estamos contribuyendo a desarrollar la argumentación, la capacidad de matematizar y la creatividad. En este sentido queremos plantear una propuesta para el desarrollo del nivel cognitivo de nuestros estudiantes, tan criticado por las últimas investigaciones internacionales y nacionales.

Entre las pruebas internacionales baste citar las Pruebas Pisa 2000, donde la muestra de escolares peruanos alcanzó en resolución de problemas matemáticos un nivel de desempeño promedio de 292 puntos, esto es 34 puntos menos que el promedio más bajo registrado en la OECD (Organización de los Países Europeos) y 42 puntos menos que el promedio del Brasil, que se ubicó en el penúltimo lugar entre los 41 países participantes.[11] Lamentablemente no tenemos datos del 2003 pues el Perú, por razones políticas, decidió que no seguiría participando en pruebas internacionales.

Entre las pruebas nacionales, a las ya citadas investigaciones de la UMC del MINEDU para el 5º de secundaria, tenemos que añadir las llevadas a cabo por la misma institución para determinar el nivel del 6º grado de primaria en el 2004. Según estas investigaciones sólo el 7,9% de los estudiantes se encuentra en el nivel suficiente, de modo que el 92,1% culmina la educación primaria sin haber alcanzado el dominio de conocimientos matemáticos elementales y básicos. De este grupo, el 57,5% de los estudiantes, no ha logrado ni siquiera los aprendizajes requeridos para acceder al grado previo que están culminando y no debería haber sido promovido al 6º grado.

Según el informe final de esta evaluación "la didáctica de nuestro país responde a un enfoque centrado en la enseñanza de reglas y algoritmos. Esta afirmación se basa en la constatación de que las preguntas en las que los estudiantes tuvieron mayor éxito fueron precisamente, aquellas que sólo demandaban un aprendizaje reproductivo relacionado con la aplicación de algoritmos convencionales o con ejercicios típicos"[12] Claramente, continúa el informe, se

[11] Piscoya, Luis. "Pruebas Pisa: Niveles de desempeño y construcción de preguntas" en EDUCACIÓN, revista de la Facultad de Educación de la UNMSM, año 1, Nº 2, Lima, diciembre 2004.
[12] Evaluación Nacional del Rendimiento Estudiantil 2004. Minedu, Lima, 2005, pp 216

aprecia que los profesores actuales están formando estudiantes poco reflexivos, que presentan dificultades para establecer conexiones entre conceptos, resolver problemas y matematizar situaciones concretas, capacidades, todas ellas, de alta demanda cognitiva que son necesarias para una adecuada participación e inserción laboral en el mundo contemporáneo.

Por todas estas razones, urge revertir esta situación preparando mejor a los futuros docentes y un método como el que presentamos en nuestros cursos de Didáctica de la Matemática de la UNMSM, representa un paso en este sentido porque justamente incide en los aprendizajes de alta demanda cognitiva.

1.4. Alcances

Nuestro trabajo se va a centrar en lo que se llama problemas aritméticos escolares, sin descartar los problemas lógicos elementales ni los problemas geométricos básicos. Dentro de estos problemas, daremos preferencia a los que están inmersos en el currículo de 5º y 6º grado pues el diseño actual incluye tanto problemas lógicos como geométricos.

Es necesario aclarar que aunque los problemas aritméticos escolares son en general problemas de textos en contextos variados, también vamos a considerar los problemas presentados en gráficos tales como cuadros, diagramas o ilustraciones. Cuando en alguna ocasión puede parecer difícil decidir si un problema puede ser considerado o no aritmético, por su contexto geométrico, físico o biológico siguiendo el criterio de Luis Puig, diremos:
"Para nosotros un problema será un problema aritmético siempre que los conceptos, conocimientos o recursos no estrictamente aritméticos de los contextos que aparecen en el enunciado, no sean decisivos a la hora de resolver el problema"[13]

En nuestra presentación del fólder, que acompaña al curso, no hemos descartado los problemas lógicos porque además de estar presentes en el diseño currricular, son básicos para desarrollar el razonamiento aritmético y por esa razón les hemos concedido un capítulo. De otro lado nos hubiera interesado abarcar un mayor número de problemas geométricos porque están en el diseño curricular pero pronto nos dimos cuenta que el trabajo con los conceptos geométricos rebasaba nuestros propósitos y nos limitamos al trabajo con el perímetro y el área, que están más relacionados con el uso de las operaciones aritméticas. En realidad los conceptos geométricos abarcan tanto contenido y tantas competencias específicas que necesitaban de por si, una tesis aparte, en especial porque requiere un material didáctico especializado[14] y la inversión de una cantidad de tiempo casi semejante al utilizado para presentar los problemas aritméticos.

Asimismo, por cuestiones de tiempo hemos tenido que priorizar ciertos contenidos, lo que nos ha obligado a hacer una selección considerando los conceptos aritméticos de mayor relevancia.

[13] Luis Puig Espinosa. Problemas aritméticos escolares. Síntesis, Madrid, 1995, pp. 19.
[14] Para subsanar este vacío estamos dirigiendo la tesis de maestría de la Lic Carmen Cuenca Jara, de la Universidad Ricardo Palma, sobre conceptos y materiales de geometría constructiva para el 5º y 6º grado.

1.5. Formulación de la hipótesis.

Según nuestra experiencia, el programa del curso "Didáctica de la Matemática III" desarrollado con los alumnos de pre-grado de las bases 2003 y 2002 de la Especialidad de Primaria de la EAP de la Facultad de Educación de la UNMSM, mejoró la comprensión de los conceptos aritméticos básicos de los estudiantes, permitiendo a la vez, un análisis más adecuado de los problemas, la aplicación de las estrategias creativas sugeridas y por lo tanto, mejoró el rendimiento en su resolución.

Pero como tenemos que probar tal aseveración nuestra hipótesis sería:

Un curso de Didáctica de la Matemática III, focalizado en estrategias didácticas para una enseñanza de la matemática centrada en la resolución de problemas matemáticos para el 5° y 6° grado, influye significativamente en el rendimiento de los alumnos participantes en la resolución de problemas matemáticos de dicho nivel.

Por tanto la hipótesis alterna sería:

Un curso de Didáctica de la Matemática III, focalizado en estrategias didácticas para una enseñanza de la matemática centrada en la resolución de problemas matemáticos para el 5° y 6° grado, no influye significativamente en el rendimiento de los alumnos participantes en la resolución de problemas matemáticos pues existen otros factores que determinan y explican en mayor grado ese rendimiento.

***

En esta tesis nos dedicamos casi exclusivamente a probar nuestra hipótesis desarrollando el curso "Didáctica de la Matemática III"[15] y nos concretamos a la investigación con dos grupos experimentales de estudiantes de la Especialidad de Primaria de la Facultad de Educación de la UNMSM, aunque posteriormente también hemos aplicado el método a la Base 2004, comprobando aún mejores resultados.

[15] ¿Por qué nos limitamos al curso "Didáctica de la Matemática III"? En primer lugar porque dicho curso se centra en la resolución de problemas del currículo de 5° y 6° como una forma de acceder a los conceptos y estrategias de dicho nivel. En ese sentido, debemos aclarar que previamente, hemos destinado dos semestres a los cursos "Didáctica de la Matemática I" y "Didáctica de la Matemática II". El primer curso está centrado en desarrollar las bases metodológicas y psicopedagógicas para la construcción del número que cuenta, del número que ordena, del numero que mide y del número que opera y asimismo, tanto al desarrollo de problemas con lectura de imágenes y textos breves como a la presentación de la geometría constructiva a nivel de 1° y 2° grado de primaria. En el mismo sentido, hemos dedicado el curso "Didáctica de la Matemática II" a sentar las bases metodológicas para el aprendizaje del cálculo mental y algorítmico, a la ampliación de conversiones con el número que mide, al desarrollo de la geometría constructiva, y a la resolución de problemas a nivel de 3° y 4° grado de primaria.

1.6. Identificación de las variables

La estrategia metodológica para comprobar la hipótesis consistió en presentar el método de la clase de matemática de 5º y 6º centrada en problemas en el curso "Didáctica de la Matemática III" utilizando una prueba pre-post para determinar el impacto de la variable método en la variable rendimiento en la resolución de problemas.

Por lo tanto, tenemos una variable independiente que es el método de la clase centrada en problemas y una variable dependiente que es el nivel de resolución de problemas alcanzado por los estudiantes.

Para la variable independiente que es el método, hemos determinado cuatro aspectos en la resolución de problemas (RP):

1. El desarrollo de los elementos que intervienen en la RP:
   a) El dominio de los términos y elementos sintácticos del lenguaje usual
   b) El conocimiento de los conceptos matemáticos
   c) La base de datos de problemas almacenados y organizados en la memoria
   d) Las herramientas estratégicas para enfrentar problemas nuevos
   e) El manejo del cálculo mental y el dominio de los algoritmos

2. Los pasos para la RP entre los que consideramos:
   a) La comprensión del texto y la determinación de los datos y la incógnita
   b) La representación mental o gráfica del texto para traducir el problema al lenguaje matemático.
   c) La escritura matemática y la ejecución de las operaciones simbolizadas
   d) La respuesta, comprobación y memoria de las soluciones.

3. El conocimiento práctico y orientador de las herramientas estratégicas para la representación de la relación entre los datos y la incógnita.

4. La presentación de los variados significados en los campos conceptuales básicos de problemas que permite al maestro clasificarlos, ayudando de este modo a un archivo organizado de soluciones como miras a formar una base de datos manejable para mejorar su posterior evocación.

Para la medición de la variable dependiente general que es el rendimiento en la RP de 5º y 6º grado, hemos identificado las siguientes variables:

1. Capacidad de **establecer relaciones lógicas**. Estas se refieren tanto a relaciones entre elementos de un conjunto y relaciones entre clases determinadas como a relaciones utilizando conectivos de la lógica proposicional y relaciones lógicas utilizando medidas propuestas. (5 items del test del 1 al 5)

2. Capacidad de establecer **relaciones aritméticas simples** entre dos, tres o cuatro cantidades que impliquen el uso de las cuatro operaciones básicas. (18 items del test del 6 al 23)

3. Capacidad de resolver problemas con los **conceptos del MCD y MCM.** (3 items del 24 al 26)

4. Capacidad de manejar **la terminología técnica de las cuatro operaciones.** (4 items del 27 al 30)

5. Capacidad de establecer **el perímetro y el área del cuadrado y del rectángulo.** (10 items del 31 al 40)

6. Capacidad de trabajar **el concepto de fracción con el uso de operadores.** (6 items del 41 al 46)

7. Capacidad de manejar **problemas con decimales** (4 items del 47 al 50)

8. Capacidad de **establecer proporciones** (4 items del 51 al 54)

9. Capacidad de manejar el **concepto de porcentaje.** (6 items del 55 al 60).

Estas variables están representadas en el instrumento de prueba que es un test de 60 items, cuyo grado de confiabilidad se ha determinado a través del coeficiente Alfa de Cronbach y cuya consistencia interna se ha analizado mediante la técnica de los coeficientes 20 y 21 de Kuder-Richardson.

Asimismo su validez interna o de constructo ha sido investigada con la consulta a un grupo de expertos[16] bajo el contexto del Análisis Multivariado, a través de la técnica de interdependencia del Análisis de Correspondencia Múltiple, con el propósito de describir las proximidades entre las categorías propuestas sobre las respuestas correctas e incorrectas en los diversos grupos de estudio.

1.7. Condiciones de la población estudiada y de la prueba utilizada

Si bien nuestro método de enseñanza de la matemática en la Primaria, se ha aplicado a escolares tanto de colegios particulares y nacionales[17] así como a profesores que han asistido a nuestros cursos de capacitación docente durante los últimos veinte años[18], las experiencias en San Marcos a partir del 2004, son las primeras con estudiantes de pre-grado de la Especialidad de Primaria, para los cuales hemos elaborado en el 2006 la última fase del método, que hemos denominado "el método de la clase centrada en problemas" aplicable para estudiantes del 5º y 6º grado de Primaria.

---

[16] Entre ellos, debemos destacar al licenciado en Estadística Carlos Orrego graduado en la UNMSM

[17] El método ha sido aplicado a través de nuestros textos en los colegios particulares Humboldt, Beata Imelda, Trener, Alemán de Santa Cruz, Max Uhle, Javouhey, Belén y Sophianum, por nombrar algunos y en los colegios nacionales Santa Rosa de Barranco, Juana Alarco de Dammert, Nuestra Señora de Monserrat, General Prado y 57 escuelas nacionales de los Conos Norte y Sur del PPE de la ONG Educa

[18] Los cursos de capacitación docente han sido ofrecidos en el Centro de Capacitación del Humboldt, en la ONG Tarea, en los cursos de verano de la PUC, en la Universidad Garcilaso y en el Consorcio de Colegios Católicos.

Para trabajar esta fase del método, se han considerado como grupos de estudio, 43 estudiantes de la Especialidad de Primaria de la EAP de Educación de la UNMSM de los ciclos 7º y 10º y además 72 estudiantes de los ciclos 7º y 9º de la Especialidad de Primaria de la Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle (UNEEGV). Los alumnos de San Marcos, del ciclo 7º y 10º, constituyen el grupo experimental que han tomado la prueba pre, antes del curso, que luego han desarrollado el curso "Didáctica de la Matemática III", y que finalmente ha tomado la prueba post-curso. Antes de tomar este curso, el grupo del 7º ciclo desarrolló "Didáctica de la Matemática I" en el ciclo 3º y "Didáctica de la Matemática II" en el ciclo 5º, ambos de 5 horas semanales. Con estos dos cursos, ellos aprendieron la aplicación del método en el desarrollo del currículo de 1º y 2º grado y luego de 3º y 4º grado. Sin embargo, el grupo de estudiantes del 10º ciclo de San Marcos llevó un currículo diverso: tomó en primer lugar un curso formativo de "Matemática Básica" y luego un curso general en el ciclo 6º que incluía "Didáctica de la matemática I y II", de 1º a 4º grado de 8 horas semanales. De modo que los estudios previos del grupo experimental de San Marcos son equivalentes, al menos en el estudio de la Didáctica de la Matemática. Mientras que los alumnos de la UNEEGV, que forman el grupo de control, han tomado en su universidad un curso formativo de Matemática Básica y dos semestres de "Didáctica de la Matemática", con un método diverso, que incidía en la preparación de material didáctico y en la práctica docente, especialmente de 1º a 4º grado, pero que no incluía el método de la clase centrada en problemas ni un método similar que enfocara el análisis de problemas para 5º y 6º grado.

Con la prueba diseñada para contrastar el rendimiento en resolución de problemas de ambos grupos, esta tesis pretende probar, que si los alumnos no se preparan en el análisis de problemas de 5º y 6º en un tercer curso de Didáctica de la Matemática, que desarrolle el currículo a través de problemas, no tendrían el aprendizaje necesario para lograr un nivel aceptable en la resolución de problemas del currículo de 5º y 6º grado de Primaria y no serían capaces de enseñar a analizar y resolver problemas matemáticos a sus alumnos, que es el punto medular en el nuevo diseño curricular de 5º y 6º grado.

Por lo tanto, en principio esta prueba ha sido diseñada para establecer una comparación entre alumnos de la Especialidad de Primaria que analizan y resuelven problemas del nivel de 5º y 6º y alumnos de la misma especialidad que no lo hacen, puesto que se centran en otros aspectos metodológicos que no implican el aprendizaje a base de problemas.

Ahora bien, ¿cómo sabemos que los problemas materia de la prueba son adecuados en su nivel y pertenecen al currículo de 5º y 6º? En primer lugar, para lograr un test que reflejara un nivel adecuado hemos coleccionado durante los últimos años de enseñanza[19] los mejores 60 problemas en el desarrollo de nuestro método, que reunieran cuatro condiciones:

[19] Parte de nuestra colección completa de problemas se encuentra en nuestros textos de 5º y 6º pero además en el curso editado por el Colegio Humboldt titulado "Olimpiadas matemáticas"

1) Que el concepto matemático que implique su resolución se encuentre expresado en el currículo nacional vigente.
2) Que la capacidad que desarrolle sea relevante para el estudiante.
3) Que el texto sea breve y expresado con claridad, de modo que la variable “dominio del lenguaje” no interfiriese de manera decisiva a la hora de resolver el problema.
4) Que las cifras a utilizarse en la resolución de problemas sean de fácil manejo, de modo que “no le de ventaja al estudiante por el simple hecho de contar con una calculadora de bolsillo”.

En segundo lugar, para lograr que el test sea adecuado hemos puesto estas especificaciones a consideración de profesores expertos, para que nos ayuden a eliminar los problemas que no reunían las condiciones mencionadas. Con su auxilio, hemos descartamos problemas demasiado extensos o ambiguos y sustituimos el 20% de los problemas inicialmente planteados.

En tercer lugar decidimos aplicar también la prueba a un grupo de escolares de 5º y 6º que tenían un buen nivel de estudio con el método. En principio, ellos intervinieron únicamente para darnos la certeza de que los problemas propuestos en la prueba, no excedían el nivel ideal del desarrollo del currículo en 5º y 6º grado. Inicialmente, nuestra idea no era publicar sus resultados, pero involuntariamente las pruebas de los 51 estudiantes de 5.1º y 6.1º grado del Colegio Humboldt, las dos secciones de matemática en castellano[20], nos dieron la oportunidad, a juicio de los expertos, de realizar interesantes hallazgos respecto al rendimiento medio sobre la prueba propuesta para esta investigación y por eso decidimos su inclusión.

Al respecto, lo interesante de la aplicación de esta integración del currículo nacional con el método alemán que desarrollamos en estas secciones del Humboldt, es que hemos logrado llevar parte de ella a San Marcos tratando de adaptarla a nuestra realidad estudiantil. Este esfuerzo nos ha permitido la formación de un equipo que trabaja activamente en el perfeccionamiento y la difusión del método, compuesto por las licenciadas Norma Sánchez Icochea y Carmen Cuenca Jara, que difunden la metodología en sus planteles nacionales, enseñan con nosotros los tres cursos de Didáctica de la Matemática en Pregrado, los cursos del CEUPS de 60 horas para profesores que se capacitan en el verano y los talleres del Programa Nacional de Capacitación Permanente en el marco del convenio con el MED para capacitar a 900 profesores de la Región Callao. La respuesta de los profesores de la Capacitación Nacional ha sido positiva y los evaluadores del MED han observado satisfechos el clima de interés que genera la metodología impartida, aunque en nuestra opinión no será posible lograr resultados concretos con sólo 6 clases de desarrollo curricular para los 6 grados. Por eso necesitamos optimizar la presentación del método en un tiempo adecuado y mejorar la presentación editada de nuestras separatas. Es la labor que nos espera y que emprenderemos el próximo 2008 con la confianza que redundará en beneficio de nuestra comunidad docente.

[20] Las secciones de 5.1 y 6.1 de “Ingreso Lateral” son las dos secciones de 5º y 6º grado del Humboldt que desarrollan el curso en castellano y su programación es una fusión del currículo nacional desarrollado con el método propuesto con el nuevo currículo alemán. Las otras 8 secciones de 5º y 6º desarrollan en sus clases en lengua alemana solamente el nuevo currículo alemán de Baden-Württemberg.

Capítulo II
Desarrollo del marco teórico

2.1. Antecedentes históricos en la investigación sobre resolución de problemas.

2.1.1. **El enfoque asociacionista.**

Según Kenneth Henson, uno de los educadores contemporáneos más importantes en Estados Unidos, muchos consideran a Thorndike (1879-1949) como "el padre de las perspectivas contemporáneas de la solución de problemas"[1]

Thorndike investigó la solución de problemas en animales colocando a un gato hambriento dentro de una caja y un trozo de pescado fuera de ella. Para resolver el problema, al principio el gato realizaba una gran cantidad de respuestas ineficientes, rasguñando o mordiendo las paredes e introduciendo su pata a través de las aberturas. Pero eventualmente acertaba a pisar la palanca que abría el cerrojo de la puerta. Cuando se le introducía en la caja nuevamente hacia los mismos movimientos azarosos hasta que nuevamente pisaba la palanca y abría la caja. Poco a poco en las veces sucesivas disminuían los movimientos azarosos hasta que al entrar de frente pisaba la palanca y abría la puerta.

Después de estudiar exhaustivamente por años el tiempo y los métodos de los animales para resolver problemas Thorndike formuló la ley del efecto estableciendo que los comportamientos seguidos de resultados positivos se fortalecen y los seguidos de resultados negativos se debilitan hasta extinguirse. De modo que la solución espontánea de problemas según Thorndike ocurre no guiada por el razonamiento sino por el aprendizaje por ensayo y error que ocurre en forma gradual en pequeños pasos y reforzada por estímulos.

Pero en nuestra opinión la solución de problemas en el ser humano difiere substancialmente de la solución de problemas en los animales porque el hombre, a diferencia del animal, cuenta con una capacidad de razonamiento más evolucionada y por otro lado su solución no tiene que ser necesariamente espontánea, dado que podemos refinar nuestra capacidad asimilando estrategias para incrementar nuestro propio potencial de resolución de problemas.

En conclusión sólo los problemas que no se someten a un análisis de la razón y que se solucionan espontáneamente sin herramientas estratégicas se resolverían efectivamente por ensayo y error. Por tanto no podemos descartar que gran cantidad de personas no reflexivas y no instruidas resuelvan sus problemas de modo semejante a los gatos de Thorndike y por esta razón mucho del comportamiento humano y social se puede explicar como resultante de las respuestas a los estímulos del ambiente socio-cultural. Sin embargo afirmar que resolvemos todos los problemas por la vía de la experiencia por

[1] Kenneth T. Henson. "Raíces históricas de la solución de problemas" en Psicología educativa para la enseñanza eficaz. Thomson Editores, México, 2000, pp. 343

medio del ensayo y error es desconocer la enorme potencialidad del cerebro humano. Es creer que resolvemos nuestros problemas exclusivamente por la vía del éxito accidental y no de la estrategia planificada, que se va desarrollando y afinando a lo largo de los estudios.

2.1.2. **La Teoría de la Gestalt**

Por eso, poco después de Thorndike surgieron los psicólogos de la Gestalt que creyeron que para estudiar la solución de problemas era necesario investigar no sólo el comportamiento de los animales superiores como los primates sino también la mente humana. Según ellos, ante un problema, en la mente del sujeto ocurre una reorganización de los elementos que intervienen, de modo que se acomodan de una manera diferente. *Los gestaltistas sostenían precisamente que las personas se atascan en la resolución de problemas porque no pueden mirar la situación desde una perspectiva nueva y no pueden ver una nueva forma para hacer encajar los elementos.*

Para resolver un problema lo importante para los guestaltistas es “imprimir dirección”, es decir hacer sugerencias que ayuden a romper con las viejas formas de organizar una situación. La nueva manera de considerar el problema con nuevas perspectivas de solución es llamada “insight” que es el “relámpago mágico” que se produce en forma súbita cuando se vislumbra una disposición de los elementos que trae consigo la captación de una organización estructural que nos lleva a la solución y que con frecuencia va acompañada de la exclamación ¡aja![2]

Según los guestaltistas si el problema no se resuelve es necesario dejarlo por un momento para que tenga lugar “el proceso de incubación” es decir el paso de un lapso que permite el olvido de las ideas que confunden y el afloramiento de nuevas ideas que ayuden a captar una nueva forma de considerar el problema que encierra su solución.

Por tanto, de acuerdo con la Gestalt, el proceso de resolución de un problema es un intento de relacionar un aspecto de una situación problémica con otro y ese intento tiene como resultado una “comprensión estructural” que da lugar al “insight” cuando todas las partes del problema encajan para satisfacer las demandas del problema.

En su libro “The mentality of apes” [3](1925) Wolfang Kohler, el fundador de la Gestalt, expone el problema de los monos que quieren alcanzar los plátanos suspendidos del techo fuera de su alcance, mientras en el piso hay una serie de canastos. Lo que Kohler quería era que los monos colocasen los cestos a manera de escalera para alcanzar los plátanos. Esta solución requiere que los elementos del problema sean reorganizados y Kohler informa que la solución fue precedida por un periodo de intensa reflexión por parte del mono al que siguió algo similar a un destello de intuición, que el llamó “insight”.

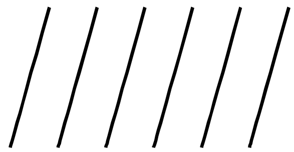
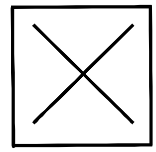
---

[2] Richard E. Meyer. “La Guestalt: el pensamiento como reestructuración de problemas.” en Pensamiento, resolución de problemas y cognición. Ed. Paidós, Barcelona, 1986, pp. 53

[3] Kohler W. The mentality of apes. New York, Harcourt, 1925. Un estudio clásico sobre la resolución de problemas y el insight en los monos.

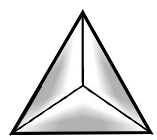
Otro problema típico de los guestaltistas es el problema de los seis palitos que presenta Katona[4]. El problema puede plantearse así:

"Dados 6 palitos ordenarlos para formar 4 triángulos equiláteros cuyos lados tengan un palito de longitud"

Algunos sujetos cruzan dos palitos en aspa, los colocan al centro de un cuadrado formado por 4 palitos y efectivamente se forman 4 triángulos. Pero esta solución no es aceptable porque los triángulos no son equiláteros, puesto que sus tres lados no tienen un palito de longitud.

Para resolver el problema el sujeto debe cambiar de perspectiva y pensar en tres dimensiones, formando una pirámide de base triangular donde la base es uno de los triángulos equiláteros y las caras son los otros tres.



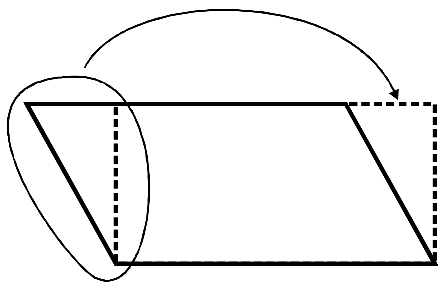
Ahora bien, como podemos analizar las perspectivas asociacionistas y guestaltistas son diferentes. Mientras los asociacionistas al resolver un problema estaban preocupados por intentar al azar un amplio margen de soluciones posibles hasta que una funcionase sobre la base del estímulo-respuesta, los guestaltistas estaban preocupados por la creación de soluciones nuevas a problemas nuevos apoyándose en el descubrimiento de estructuraciones u organizaciones **mentales**, sin duda más difíciles de comprobar científicamente y esta es una de las críticas que a menudo se ha hecho a los psicólogos de la Gestalt.

Al respecto es necesario aclarar que Wertheimer[5], otro psicólogo de la Gestalt, hace una distinción interesante entre pensamiento reproductivo y pensamiento productivo. El pensamiento reproductivo simplemente reproduce antiguos hábitos o comportamientos ya adquiridos y evidentemente es uno de los tipos de pensamiento característico que investigan los asociacionistas. Mientras que del otro lado existe el pensamiento productivo, basado en la creación de una nueva solución que produce la visión de una diferente organización estructural y es éste el tipo de pensamiento que interesa a los psicólogos de la Gestalt.

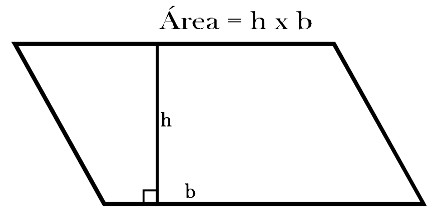
---

[4] Katona G. Organizing and memorizing. Columbia University Press, New York, 1940.
[5] Wertheimer. M. Productive Thinking. Ed. Harper and Row, 1959. Un enfoque guestéltico de la resolución de problemas y como enseñarlo.

Wertheimer presenta un problema sobre la determinación del área de un paralelogramo a dos grupos de estudiantes utilizando métodos basados en los dos diferentes tipos de pensamiento. El método de la comprensión alentaba a los estudiantes a considerar las relaciones estructurales de un paralelogramo según las cuales moviendo el triángulo que se forma a un lado hacia el otro puedo obtener un rectángulo y calcular su área. El método de la memorización les pedía trazar una perpendicular para obtener la altura y aplicar la fórmula memorizada.



Método de la comprensión



Método de la memorización

Ambos grupos resolvieron los diversos problemas típicos que se les presentaron pero solamente el primer grupo pudo afrontar con éxito problemas nuevos que implicaban transferencia o la distinción entre soluciones posibles o imposibles.

En 1953 Hilgard, Irving y Whipple descubrieron que el grupo de comprensión necesitaba mucho más tiempo para resolver problemas prácticos que el grupo de la memorización, que ambos grupos operaban de igual manera en pruebas que requerían retención de un día pero que el grupo de comprensión operaba significativamente mejor en un conjunto de problemas de transferencia, entendida como el conocimiento que nos permite ir “más allá de la información dada” para establecer conocimiento en otros campos relacionados.

En la década del 60 esta distinción entre pensamiento reproductivo y pensamiento productivo fue presentada como aprendizaje por exposición (Shulman y Keisler 1966) y aprendizaje por descubrimiento por Bruner (1961-1968). Es importante señalar que el método de descubrimiento de Bruner comparte con el de aprendizaje por comprensión de la Gestalt, la promesa de un rendimiento superior tanto en la transferencia a nuevas situaciones como en la retención por parte del sujeto

2.1.3. **El enfoque de los estadios: la Gestalt y su influencia en Polya**.

En 1926 en su libro “The art of Thougt”, Wallas sugiere que se puede dividir el proceso de resolución de problemas en varios estadios y propone 4 fases:

a) Preparación, donde se recolecta la información y se efectúan intentos preliminares de solución.
b) Incubación, momento en que se deja el problema para realizar otras actividades o dormir.

c) Iluminación, aparece la clave para la solución y aquí es donde se presenta el "insight" o el "ajá"
d) Verificación, donde se comprueba la solución para estar seguros de que funciona

Poco después en 1933, el filósofo pragmatista John Dewey[6] sugirió 4 fases en la cuales dio gran importancia al papel de las hipótesis de trabajo:

1) Definición del problema, que consiste en identificarlo, definirlo y establecer el método que usaremos para abordarlo.

2) Desarrollo de la hipótesis, que consiste en elaborar posibles y adecuadas suposiciones que podrían resolver el problema. Mientras más hipótesis se generen hay mayores probabilidades de resolver el problema.

3) Comprobación de la hipótesis, proceso mediante el cual se someten a prueba y evalúan las hipótesis desarrolladas en el segundo paso

4) Selección de la mejor hipótesis, proceso en el cual se toma una decisión respecto a las hipótesis evaluadas en la etapa anterior para determinar cuál de las hipótesis generadas utilizaremos para resolver el problema.

Aunque Kohler no estaba de acuerdo con los métodos de solución de problemas de Dewey, sus procedimientos que esbozaremos en cinco pasos, tienen cierta semejanza, en especial respecto a la definición del problema:

1) Identificación del problema. Kohler coincide con Dewey en que todo problema debe definirse y delimitarse antes de abordarse.

2) Periodo de incubación. Como todo gestaltista Kohler le concede importancia al periodo de maduración de las ideas.

3) Insight. Entendido como la conciencia súbita de la estructura formal que encierra la solución del problema.

4) Memoria de las soluciones con insight. Kohler creía que una vez resuelto el problema el sujeto fija la solución para recordarla

5) Generalización de las soluciones. Kohler creía que al fijar la solución se conserva la capacidad para aplicarla a situaciones similares en el futuro.

Estas fases esbozadas tanto por Dewey como por los gestaltistas han tenido mucha influencia en los estudios de metodología de la investigación y resolución de problemas. Incluso han tenido influencia en la didáctica de la matemática a través de la obra del profesor Polya. Georg Polya[7] (1945, 1957) propuso cuatro fases e introdujo en ellas la idea de "plan" o estrategia, concepto clave basado en su experiencia como profesor de matemática. Estas cuatro fases son:

---

[6] John Dewey. Lógica, teoría de la investigación. (1933-1938)
[7] Georg Polya. Como plantear y resolver problemas. Trillas, México, 1974. (Polya, How to solve it., Princenton 1945 y Anchor Books, 1957)

1) Comprensión del problema

Primero dice Polya "tenemos que ver claramente lo que se pide" porque es tonto contestar a una pregunta que no se comprende. Pero el alumno no sólo debe comprender el problema, debe también desear resolverlo.[8] Polya toca por primera vez el aspecto de la voluntad y el interés del estudiante. Si hay falta de comprensión o hay falta de interés, sugiere Polya, puede deberse a una mala selección del problema por parte del docente o a la falta de una presentación de un modo natural e interesante.

Asimismo el maestro debe preguntar al alumno por las partes principales del problema: los datos, la incógnita y la condición. Al observar como colocan los datos les preguntará ¿es posible colocando los datos en esta forma satisfacer la condición?

El maestro debe preguntarse además ¿están los alumnos familiarizados con los conceptos matemáticos que involucra el problema? ¿y con los símbolos para representarlos? *Si no lo están, el problema es la ocasión adecuada para introducirlos.*

2) Elaboración de un plan

Tenemos concebido un plan cuando más o menos sabemos qué cálculos, qué razonamientos o construcciones habremos de efectuar para determinar la incógnita.

De hecho esta es la parte más importante para solucionar un problema. Esta idea puede tomar forma poco a poco después de ensayos más o menos infructuosos o puede ocurrir que luego de "*un periodo de duda se puede tener de pronto* ***una idea brillante****"*[9]

El papel del maestro es ayudar al alumno después de ensayos infructuosos hacia esa idea brillante, que el profesor conoce, mediante preguntas y sugerencias que tienen por objetos provocarlas en el alumno. Pero para lograrlo el alumno ha de tener un cierto nivel de preparación. El maestro debe recordar, dice Polya, que las buenas ideas se basan en la experiencia pasada y en los conocimientos adquiridos previamente y que son totalmente imposibles si desconocemos la materia o si nuestros conocimientos en determinados aspectos son muy pobres. Por eso siempre es útil sugerir a los alumnos *"Mire bien la incógnita. Trate de pensar en algún problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una similar"* Luego cuando ya han encontrado el problema similar se les sugiere: *"He aquí un problema relacionado con el suyo y ya resuelto. ¿Puede Ud. hacer uso de él?"*

Otra forma sugiere Polya es modificar el problema y hay medios específicos para ello tales como la generalización, la particularización, la analogía, el descartar la condición, etc…De esta forma la modificación del problema nos conduce a uno auxiliar apropiado. Dice Polya:

[8] Op. cit pp 28
[9] Polya. Op. cit. pp 30 Este paso nos recuerda el periodo de incubación y el insight.

"Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero algún problema relacionado con él"

Con estas indagaciones nos alejamos pero luego podemos volver a nuestro caso con preguntas como:
"¿Ha empleado todos los datos? ¿Ha hecho uso de la condición?"[10]

3) **Ejecución del plan**.

Cuando ya se ha concebido el plan ejecutarlo es cuestión de paciencia. En este sentido es más sencillo ejecutarlo que concebirlo porque esto implicaba una serie de circunstancias: conocimientos adquiridos, buenos hábitos de pensamiento y concentración, además de buena suerte con el surgimiento de las ideas adecuadas. Mientras que cuando el alumno ha concebido ya el plan, dispone de una línea general de trabajo y ahora debe repasar cada detalle para asegurarse que no quede ningún rincón oscuro. En este momento el maestro goza de una paz relativa aunque debe insistir en que el alumno recuerde y verifique cada paso.

En ciertos casos se usará los procedimientos deductivos y en otros los intuitivos. El profesor puede recalcar la diferencia que existe entre ver y demostrar: *"¿Pueden ustedes ver claramente que el paso es correcto?; pero ¿pueden también demostrar que es correcto?"* El alumno debe tener presente que una cosa es la intuición matemática, de carácter inductivo en base a ejemplos y otra la demostración matemática, de carácter deductivo.

4) **Reflexión y examen de la solución**

Aún los buenos alumnos una vez que han resuelto el problema tienden a cerrar el cuaderno y dedicarse a otra cosa pero al proceder así, omiten una fase importante y muy instructiva del trabajo: la comprobación de la solución. Es que reconsiderar la solución, reexaminar el resultado y el camino que los condujo a ella podría tanto consolidar conocimientos como desarrollar aptitudes para resolver problemas. Ningún problema queda completamente terminado con la primera solución pues en muchos casos es posible comprobarla utilizando otro método. En otros casos la solución es larga y complicada y tal vez mediante un estudio cuidadoso, se puede ir mejorándola hasta optimizarla y tener la solución ideal. En todo caso si sólo encontramos una, siempre podemos mejorar nuestra comprensión de la solución examinándola.

Para entrar en esta visión retrospectiva las preguntas más adecuadas son:
"¿Puede verificar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento? ¿Puede obtener el resultado de un modo distinto? ¿Puede verlo de golpe?" [11] Polya se refiere en esta última pregunta a la búsqueda de un razonamiento corto y simple en lugar de uno largo y complicado.

---

[10] Polya. Op. cit pp 31
[11] Polya. Visión retrospectiva. Op cit pp 35

Por otra parte el profesor debe alentar a sus alumnos para que establezcan vínculos entre la solución aplicada y otros casos del mundo real como una forma de establecer la relación entre matemática y mundo físico. La pregunta adecuada sería: *¿Puede utilizar el resultado o el método para resolver algún otro problema?*

En el caso que se llegue a establecer una fórmula y el problema se pueda algoritmizar los alumnos quedarán sorprendidos ante la gran cantidad de problemas del mundo real que pueden resolver ahora con su aplicación.

Como vemos este paso tiene gran similitud con la Verificación de Wallas y con la Memoria y generalización de las soluciones de Kohler. En general la perspectiva de Polya es similar pero en ciertos aspectos mucho más precisa que el enfoque gestáltico, especialmente porque construye preguntas-guía adecuadas para conducir a los estudiantes hacia el insight y la generalización de las soluciones. El mérito de Polya es haber aportado al análisis gestáltico intuiciones excelentes acerca de cómo se produce la reestructuración y cómo fomentarla pero el concepto de insight es aún todavía confuso.

Los psicólogos de la Gestalt, especialmente Duncker y Luchins han estudiado también lo que se conoce como **transferencia negativa** y fijeza funcional. Aunque un conocimiento previo es indispensable Duncker sostiene que "el pensamiento productivo es imposible si el sujeto está encadenado al pasado" y en los casos en que un sujeto se basa en hábitos y usos muy específicos para resolver un problema que requiere variar la función del objeto "*la experiencia pasada se convierte en un obstáculo*". Maier, sin embargo siguió estudiando el problema de la transferencia y encontró lo que denomina **transferencia positiva** en la cual los hábitos y las experiencias específicas son útiles en la medida que requieren esas ideas específicas aplicadas en una forma muy parecida pero en cambio son un obstáculo en situaciones que exigen la utilización de los objetos en una forma nueva.[12]

En conclusión, parte de la solución de un problema consiste en descubrir de qué modo se relaciona con la experiencia pasada. En unos casos hay que desligarse de la experiencia pasada y en otros casos hay que utilizar el objeto en una función análoga. En sí la experiencia pasada por sí sola no es suficiente para lograr una solución original, el sujeto necesita algún principio organizativo, alguna nueva vía, en resumen: una dirección. En efecto, en todas las experiencias de los gestaltistas se notaba que los individuos necesitaban alguna clave acerca de cómo reformular el problema, clave que podía generarse de manera externa o interna, si bien muchas veces cuando la idea aparecía de repente, aquello que la producía podía quedar fuera de la conciencia y ser algo totalmente desconocido para el sujeto. Este origen un tanto incierto del insight ha traído ciertas discusiones en torno al valor científico de la Gestalt y sin embargo no dejan de ser notables la distinción entre pensamiento productivo y reproductivo, la idea que la solución de problemas se produce por etapas y que la principal herramienta para lograrla implica la reorganización o reestructuración del problema.

[12] Richard E Mayer. El pensamiento como reestructuración de problemas en Op. cit pp. 83

2.1.4. **La solución de problemas como representación del significado: Ausubel**.

La concepción del pensamiento de la Teoría del significado de Ausubel implica descubrir de qué forma el problema actual se relaciona con los conceptos e ideas que ya existen en la memoria de quien ha de resolver el problema. Para plantear el asunto en términos adecuados debemos hablar de relaciones externas entre elementos del problema y esquemas lógicos del sujeto. Todo problema externo debe ser asimilado a la propia experiencia interna del que piensa y ser traducido a términos familiares. De acuerdo con este punto de vista el pensamiento es un proceso de descubrir un conjunto de experiencias pasadas con el que ha de relacionarse el nuevo problema para luego ser interpretado de acuerdo con el esquema particular que se haya seleccionado.[13]

Aquí se trata de pensar la reestructuración para solucionar un problema en términos de buscar "esquemas lógicos" almacenados en la mente para contrastarlos con los nuevos datos y "asimilarlos" es decir encuadrarlos dentro de nuestras experiencias pasadas a fin de darles un significado que nos lleve a la solución.

La teoría del significado introduce dos nuevos términos al debate que son "esquemas lógicos" y "asimilación". Según Bartlett "Un esquema se refiere a una organización activa de reacciones pasadas que siempre debe ser supuesto como operativo en cualquier respuesta orgánica bien adaptada"[14] Mientras que la idea de asimilación se refiere a la búsqueda del encuadre o esquema apropiado en la experiencia pasada para resolver el problema. Una vez que el encuadre se descubre, surgen los hechos de significado, desde percibir a pensar vías de solución a un problema complejo. La asimilación, por tanto, es el esfuerzo de conectar algo dado con algo distinto para darle significado.

Ausubel afirma que cuando los datos recibidos son asimilados se puede hablar de la asimilación de un nuevo esquema lógico a la estructura cognitiva.

En la estructura cognitiva almacenamos dos tipos de esquemas:

a) Conocimientos con significados provenientes de la experiencia
b) Conocimiento mecánico o algoritmia, es decir un conjunto de fórmulas mecánicas o reglas para operar sobre conceptos.

La información que un sujeto recibe puede ser asimilada a los diferentes tipos de esquemas lógicos y ello influye decisivamente en la resolución de problemas. En un estudio sobre diferentes problemas de probabilidad, Mayor y Greeno (1972), variaron las secuencias de instrucción a dos diferentes grupos. El grupo 1, que llamaremos grupo concepto, recibió instrucciones aclarando conceptos como "ensayo" "éxito" "probabilidades de éxito" en función de su experiencia pasada en manejar promedios o eventos de probabilidad y aprendieron gradualmente a componer una fórmula. Mientras que el grupo 2, que llamaremos grupo fórmula, comenzó con la fórmula y aprendió gradualmente como actuaban los elementos que la componían.

[13] Ausubel D.P. Educacional Psycology: A cognitive view. Holt, Rinehart y Winston, New York, 1968 Cap. 2, 3, 14, 15 y 16 desarrollan la asimilación al esquema y su relación con la solución de problemas.
[14] Bartlett Remembering. Cambridge University Press, London, 1932. pp. 201

Si bien ambos grupos recibieron la misma instrucción previa a la resolución de problemas e incluso con los mismos ejemplos de modelo, los procedimientos de instrucción que determinaron usos de esquemas diferentes, determinaron también resultados distintos en los tests de problemas. El "grupo fórmula" actuaba bien en la transferencia cercana pero cuando se trataba de transferencia lejana fracasaba. Los resultados del "grupo conceptos" eran a la inversa pues actuaban mejor precisamente en la transferencia lejana.

Mayer y Greeno concluyeron que ambos grupos habían asimilado los conceptos para la solución de problemas a diferentes esquemas lógicos. Ellos afirman:

"Un aprendizaje nuevo implica el desarrollo de una estructura cognitiva que resulta de relacionar las ideas nuevas y acomodar las estructuras existentes. Según esta concepción del aprendizaje, los diferentes procedimientos instructivos pueden activar diferentes aspectos de una estructura cognitiva existente. Y puesto que el resultado del aprendizaje está determinado conjuntamente por el material nuevo y la estructura a la cual se asimila, el uso de diferentes procedimientos puede conducir al desarrollo de estructuras marcadamente diferentes durante el aprendizaje de algún concepto"[15]

Actualmente en nuestro medio un grupo de centros educativos conocidos como "colegios pre-universitarios" hace uso de métodos basados en fórmulas y otros procedimientos algorítmicos como medio para acortar el tiempo de instrucción pero no toman en cuenta que los conceptos así aprendidos sirven para una transferencia cercana pero no permiten transferencia lejana. Asimismo, cuando lo aprendido no activa los esquemas de conocimiento lógico con significado no es formativo para un aprendizaje posterior.

Otra contribución importante de la Teoría del significado en la resolución de problemas es la idea de "concretización". En este sentido han trabajado Dienes y Brownell. Dienes creó entre otros materiales, el sistema multibase que representa la escritura numérica en cualquier sistema y puede ayudar a resolver problemas de transformación y de operatividad mediante la comprensión de los diversos sistemas. Brownell trabajó la teoría del significado basándose en la idea que los estudiantes deben entender como las reglas para la solución de un problema se relacionan con sus experiencias pasadas y no simplemente con la memorización de cómputos para respuestas rápidas. "*La aritmética* –decía- *no debe ser un desafío a la memoria del alumno sino a su inteligencia*" "La ejercitación es de utilidad cuando las ideas y los procesos ya comprendidos deben ser practicados para aumentar la eficiencia".

Luchins estudió la relación entre material concreto y transferencia negativa. Llegó a la conclusión que concretizar la situación reduce pero no elimina el problema de la transferencia negativa, entendida ésta como influencia de experiencias pasadas que conducen a error cuando el pensamiento se mecaniza y no da paso a nuevas perspectivas.

[15] Mayer y Greeno cit. por Richard Mayer en "El significado: el pensamiento como representación de problemas" en Op. cit pp 94

En el mismo sentido que el uso de material concreto, la Teoría del significado ha sugerido el uso de imágenes porque una persona puede relacionar más fácilmente un problema con su experiencia pasada formando una imagen gráfica que organice y ordene sus ideas. En 1966 Paige y Simon realizaron una investigación sobre la influencia de las representaciones visuales en la representación de problemas matemáticos pidiendo a los alumnos que representaran en un gráfico la información contenida en el problema. De la misma resultó que los estudiantes que resolvieron los problemas tendían a producir diagramas integrados con los datos relacionados mientras que los que fracasaban en el intento tendían a reproducir los datos aislados o cambiados. En todo caso el gráfico no ayuda, si no se ha comprendido el vínculo entre los datos y su relación con la incógnita.

¿Debe el maestro permanecer indiferente ante este problema? Una cosa es considerar que la transmisión en muchos casos es ineficaz y otra muy distinta y negativa sostener que nunca debamos utilizarla. Ausubel ha insistido en este asunto. El defiende la intervención del otro cuando es necesaria porque el hecho que el maestro, padre u otro niño sugieran una idea a un aprendiz puede ser justo lo que éste necesita en un momento determinado para ayudarle a construir el significado.

Por eso, en nuestra experiencia una manera de producir el insight en aquellos que no lograron la fase inicial de "graficar los datos del problema" sea la técnica de resolución grupal de al menos una parte del problema. Tal camino se puede lograr pidiendo a los alumnos que han graficado adecuadamente los datos una reproducción de sus gráficos en la pizarra. La sola visión de un gráfico adecuado elaborado por un compañero puede actuar como pista de solución y libera al maestro de "soplar" la respuesta a sus alumnos, lo cual les da el sentimiento que están resolviendo el problema por sí mismos o en todo caso solidariamente.

En este sentido, otro aporte de la Teoría del significado es la idea de que cuando los estudiantes aprenden por sí mismos como resolver un problema aprenden algo diferente a cuando simplemente se les da la solución. Una explicación de esta supuesta diferencia es que cuando las personas resuelven por sí mismas están tratando de activar una serie de esquemas para encajar los datos del problema, mientras que cuando se les dan las reglas de solución están activando un conjunto reducido de experiencias pasadas con estructuras cognitivas aprendidas de memoria. Aunque el aprendizaje activo es por esta razón considerado mejor respecto a la retención y transferencia es necesaria una mayor investigación experimental sobre la función del aprendizaje algorítmico. Los aprendices también son capaces de hacer suyas ideas nuevas cuando se las trasmiten y si no fuese así, cada individuo tendría que reconstruir la totalidad del saber y esto además de innecesario, es totalmente ridículo.[16]

Sin embargo, parece que alguna actividad por parte de quien resuelve el problema tiene como resultado un aprendizaje más amplio aunque es bueno puntualizar que la "actividad per se" no garantiza la resolución efectiva de

[16] A Orton "Constructivismo" en Didáctica de las matemáticas. Ed. Morata, Madrid, 1998, pp. 202

problemas y para que esto ocurra ha de ser una actividad con determinada dirección, es decir como decía Bruner con un andamiaje adecuado.

Por eso los ausbelianos insisten en la actividad pero orientada a la adecuada representación del problema. Adams insiste, por ejemplo, en romper los muros mentales que impiden, al que debe resolver el problema, percibirlo correctamente o concebir su solución.[17] Mientras que Meir y Burke descubrieron que cambios menores en el vocabulario tenían un efecto importante en la representación. Ausubel, por su parte, sugiere orientar esta representación con el concepto de organizador previo o avanzado. Un organizador avanzado puede ser desde un título adecuado hasta un esbozo o idea previa antes presentar el problema. Los organizadores previos son para Ausubel las luces que guiarán a los alumnos en el proceso de asimilación. En mi experiencia no hay mejores luces para solucionar un problema que un concepto correctamente asimilado y madurado en cada nuevo problema.

Como vemos la Teoría del significado está muy cerca de la Teoría de la Gestalt y con frecuencia no se separa de ella pero mientras que la Gestalt pone énfasis en la estructura interna de los elementos del problema, la Teoría del significado se propone descubrir las relaciones externas entre los elementos presentes y otros conceptos en la memoria del sujeto.

De cualquier modo, Ausubel ha hecho un extraordinario aporte al señalar el papel de los conocimientos previos en la adquisición de conocimientos: "De todos los factores que influyen en el aprendizaje, el más importante consiste en lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto y enséñese consecuentemente."[18] Por lo tanto cuando esperamos la resolución de un problema y ello no ocurre debemos identificar aquellos elementos que existen en el repertorio de conocimientos del alumno que sean relevantes para su solución y trabajar a partir de ellos. En mi experiencia si vemos que los elementos con que cuenta no son suficientes como organizadores previos entonces es necesario completarlos. Tal vez nos hace falta un concepto matemático. Tal vez un concepto del vocabulario del lenguaje usual. Quizá las palabras del problema son conocidas por el niño pero están presentadas con una estructura lingüística poco usual para su edad.

Pero en nuestra experiencia, las fallas son también imputables a las técnicas. Tal vez nos hacen falta técnicas de cálculo mental para estimar un resultado coherente. Tal vez es necesario repasar los algoritmos para obtener un resultado exacto y no sólo aproximado. Tal vez el problema presentado requiere técnicamente resolver problemas previos para enlazar los significados.

En este sentido, Ausubel ha acertado cuando nos habla de los organizadores previos. Pero es importante saber que no hay un único modo general de proceder. En general, el maestro tiene que proporcionar al alumno el andamiaje adecuado pero se necesita una gran destreza y un amplio repertorio de soluciones para proporcionar a cada alumno el mejor andamiaje en cada problema.

---

[17] Adams, J.L. Conceptual Blockbusting, W.H Freeman y cía. San Francisco, 1974. pp 11

[18] Ausubel. Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo. Ed. Trillas, México, 1976. pp 6

2.1.5. **La solución de problemas como procesamiento de la información**

Casi cualquier estudio que investigue y trate de explicar como se procesa la información en la mente humana puede reivindicar su pertenencia al enfoque que se conoce como "procesamiento de la información"

En principio el movimiento surgió como alternativa al concepto de estímulo-respuesta del conductismo y su interés radicaba sobre todo en prestar atención a lo que ocurre en la mente humana entre el estímulo y la respuesta. [19]

Pero luego, en opinión de Sternberg la influencia de Piaget fue decisiva y algunos teóricos como Rumelhart y Norman propusieron dos modos de adquisición del conocimiento en el lenguaje del procesamiento de la información que correspondían casi exactamente a la asimilación y a la acomodación

No obstante a menudo encontramos las diversas teorías del procesamiento de la información dominadas por la figura del computador y el papel de la memoria. El computador se presenta como modelo de la mente humana y al igual que este aparato lo decisivo para su funcionamiento es la memoria, puesto que su objetivo es el almacenamiento del conocimiento en el seno de la memoria a largo plazo (MLP). Frente a esta memoria a largo plazo existe la memoria de trabajo (MT) donde precisamente se realiza la solución de problemas, la toma de decisiones y la creación de nuevo conocimiento. Si la información de la MT se codifica y organiza como compatible con los conocimientos almacenados en la MLP entonces la información de la MT pasa a almacenarse en la MLP en la cual permanece por un tiempo indefinido que puede ser breve o muy largo hasta ser permanente.

Ante un problema la MT recupera de la MLP los datos que necesita para resolverlo. Estos datos pueden ser conceptos matemáticos, palabras y estructuras del vocabulario usual, fórmulas y algoritmos matemáticos, destrezas de cálculo mental, estrategias de resolución de problemas análogos, etc… Exactamente todos los elementos que Ausubel pensaba que era necesario activar como organizadores previos y los que Polya consideraba que era necesario repasar con los alumnos para resolver un problema.

Lo interesante y singular del procesamiento es la metáfora de la memoria como un ordenador. La mente humana posee un control de entrada que selecciona la información que pasa, un espacio de procesamiento de la información que pasa en la MT y un almacén en la MLP. La analogía se ha llevado aún más lejos, al afirmar que la mente humana "posee, incorporada desde el nacimiento y ya dispuesta para la acción, una ROM (Read only memory) es decir una memoria sólo de lectura".[20]

Es interesante la explicación del proceso de trasladar conocimiento de la MT a la MLP, que es una visión enteramente compatible con la postura de Ausubel.

---

[19] Cobb, P. Información processing and mathematics education. A constructivist perspective. Journal of Mathematical Behaviour 6, 3-40, 1984.

[20] A. Orton, "Procesamiento de la información" en Op. cit. pp 205

Sólo pasan a la memoria a largo plazo los conocimientos que se integran al saber previamente asimilado, es decir los conocimientos que al tener un significado para el usuario son capaces de integrarse a la totalidad. Aquí se nota claramente la influencia de Ausubel.

Por otro lado hay algunos otros aportes en este enfoque. Son interesantes las referencias al olvido. Ante un problema, por ejemplo, el usuario evoca los conocimientos asimilados y habrá olvidado y no podrá recordar aquellos datos que no se integraron a su estructura cognitiva. El olvido es en esta teoría, la imposibilidad de recuperar lo que habíamos almacenado en la memoria de modo tan superficial que no llegó a asentarse en la MLP.

Se rechaza por lo tanto la teoría del olvido como decaimiento[21], en el sentido que la memoria se desvanece con el paso del tiempo y que se retiene mejor si se acelera la tasa con que se presenta el material y se usa menos tiempo para presentarlo. Tal vez a corto plazo esto funciona, lo mismo que si se trata de slogans de difusión masiva pero usar mayor tiempo de presentación de un concepto mejora por lo general su posterior evocación.

Se ha estudiado también la interferencia en la solución de problemas que ya iniciaran los gestaltistas como transferencia negativa. El olvido de un concepto o procedimiento para resolver un problema se explica porque la ejecución de una tarea de aprendizaje pudo interferir con el desempeño de otra. El ingreso a la memoria de nueva información interfirió con lo que aprendimos antes y fue eliminada o distorsionada, de modo que es imposible evocar el concepto o proceso que la solución del problema requiere.

Se distingue la interferencia retroactiva y la interferencia pro-activa. La interferencia retroactiva sugiere que la información aprendida recientemente interfiere con la retención anterior. Por ejemplo, en nuestra experiencia cuando se enseñan los problemas de MCM y a continuación los de MCD, los alumnos por un tiempo resuelven los de MCD como si se tratara de MCM porque los casos son similares. La interferencia pro-activa se observa cuando el aprendizaje previo interfiere con el aprendizaje que tiene lugar en el presente. Por ejemplo, los alumnos no pueden explicar por qué un medio por un quinto da un décimo, ya que toda multiplicación de los factores debería dar según ellos un producto mayor, y este concepto previo impide que asimilen la multiplicación de fracciones y que puedan resolver problemas de ese género. Hasta que ellos no amplíen su concepto de multiplicación de números naturales hacia el de multiplicación de fracciones, no podrán resolver este tipo de problemas por comprensión sino solamente en forma mecánica y superficial que olvidarán al poco tiempo por no haber integrado sus conocimientos a su estructura cognitiva general.

Los psicólogos actuales del procesamiento de la información sugieren que lo decisivo para la solución de un problema es la representación del problema.
Esta representación incluye tres aspectos[22]:

---

[21] Glover J.A. & Bruning , R.H. Educational Psycology principles and aplications, Glenville, Scout Foresman, 1990. Ellos rechazan esta posición y dan interesantes sugerencias para minimizar el olvido.
[22] Henson K. "Solución de problemas, creatividad y construcctivismo" en Op cit. pp.346

1) El estado inicial
   Es la situación ambiental que se encuentra el individuo cuando se identifica el problema.

2) El estado intermedio
   Esta etapa se inicia cuando el individuo comienza la resolución del problema. Se definen las diversas alternativas utilizando los conceptos y los operadores adecuados. Con frecuencia hay limitaciones para aplicar algunos operadores por desconocimiento de las técnicas de manejo.

3) El estado meta
   Es el fin buscado para resolver el problema.

En un artículo reciente el español Juan García Madruga[23] sostiene que la resolución de problemas dentro del enfoque del procesamiento de la información implica los siguientes pasos:

1) Representación del problema, que incluye el estado inicial o punto de partida, el estado meta o solución y un conjunto de movimientos lícitos.

2) Establecimiento de una serie de sub-metas que permitan un acercamiento efectivo a la solución.

3) Aplicación de la estrategia medios-fines que permiten reducir las diferencias entre el estado inicial y el estado meta o solución.

* * *

En realidad todos los enfoques manejan conceptos similares y tal vez la diferencia estriba en la importancia que conceden en sus investigaciones a los factores intervinientes en el proceso de resolución de problemas, que en conclusión se ha revelado como uno de los más complejos de la mente humana.

Hemos revisado hasta aquí cinco enfoques en torno a la resolución de problemas y finalmente vamos a presentar el enfoque adoptado. Los enfoques que hemos revisado nos dan explicaciones acerca de cómo se da en el sujeto el proceso de resolución de problemas y con cada uno de ellos hemos aprendido a considerar un aspecto. Con el asociacionismo apreciamos la importancia del método de ensayo y error, con la Gestalt la comprensión estructural que da lugar al “insight”, con Polya los pasos metodológicos para lograr el “insight”, con Ausubel la importancia de la representación mental del problema que resulta de relacionarlo con los conceptos e ideas que ya tenemos y con la teoría del procesamiento de la información, la importancia de considerar como la MT recupera de la MLP los datos que necesita para resolver un problema.

Partiendo de esta última teoría hemos considerado a los datos de la MLP como conocimiento expresado en premisas y hemos elaborado una postura lógico-lingüística más que psicológica.

[23] Juan García Madruga. “Resolución de problemas” en La resolución de problemas en matemáticas. Ed. Graó, Barcelona, 2002

2.2. Bases teóricas de la investigación: Elementos en la resolución de problemas.

Para el desarrollo de nuestro trabajo, que consiste en determinar los elementos que intervienen en la resolución de problemas matemáticos de texto, nos vamos a centrar en problemas de nivel elemental, partiendo del concepto que un problema matemático de texto es un conjunto de proposiciones a partir de las cuales deben determinarse las premisas que se conocen como incógnita y que al hallarse a través de un proceso de solución se convierten en la premisa de respuesta.

Ahora bien, el conjunto de proposiciones iniciales de un problema matemático no siempre está expresado y completo. Requiere de premisas tácitas que el sujeto debe conocer previamente para poder recordarlas y aplicarlas, aunque en algunos casos el sujeto pueda también imaginarlas creativamente. El recuerdo de estas premisas y la composición creativa de otras tantas, lo puede llevar a inferir directamente la incógnita o al establecimiento de premisas intermedias que lo llevarán finalmente a alcanzar la premisa de respuesta. Entre las proposiciones tanto expresas como tácitas distinguimos:

1. Las premisas del texto del problema expresadas en palabras del lenguaje usual como punto de partida.

2. Los significados de los términos de las premisas que expresan conceptos matemáticos implicados en la estructura del problema.

3. La base de datos con soluciones de problemas similares para la resolución de problemas por razonamiento analógico.

4. El conjunto de estrategias de representación del problema para enfrentar problemas nuevos por razonamiento inferencial y composición creativa.

5. Las reglas de los procedimientos para la ejecución de los algoritmos que pueden prescribir tanto los pasos para resolver las operaciones indicadas como los problemas mismos, cuya solución, en ciertos casos puede ser algoritmizada, tal como sucede con las fórmulas que determinan las áreas.

6. Las proposiciones de cálculo mental y las relativas a las propiedades para consolidar su dominio, que pueden sustituir con ventaja el uso de algoritmos operativos e incluso el uso de la calculadora cuando las cifras programadas son manejables por sus reglas.

Analicemos el concepto de problema y luego cada uno de estos elementos como factores que intervienen en la resolución de problemas. Para analizar el concepto, tengamos en cuenta que el problema aritmético escolar es un género literario bien caracterizado, donde hay un contrato implícito por el cual el autor del texto no debe aclarar completamente su objeto y la tarea a resolver, de modo que el estudiante encare ciertas dificultades para su descubrimiento, que le permitan desarrollar su capacidad de razonamiento y penetrar en ese lenguaje tan especial que son las matemáticas, lenguaje que es aprendido casi en simultáneo, aunque por lo general, con posterioridad a la lengua materna.

2.2.1. ¿Qué es y qué no es la resolución de problemas?

Antes de declarar lo que entendemos por resolución de problemas matemáticos escolares vamos a aclarar lo que no se entiende por ello. En muchos textos de matemática al final de cada lección hay una serie de *ejercicios rutinario*s que es posible que se denominen problemas aunque es improbable que lo sean. La práctica de esos *ejercicios* es importante y necesaria para fijar ciertas técnicas algorítmicas en la memoria a largo plazo, pero aquí no se trata de problemas sino de conocimiento de tipo reproductivo. *La primera característica de un problema es que no es un ejercicio rutinario.*[24]

La segunda característica se refiere, como explicaremos más adelante, a que *la resolución de problemas matemáticos es un proceso muy complejo que puede generar conocimiento de tipo productivo.* En primer lugar se produce el análisis del texto, o en su defecto la lectura del cuadro informativo o de la situación problemática condensada en una imagen. A partir de esta lectura se produce en segundo lugar, la determinación de los datos y la incógnita, actividad que genera la búsqueda de un plan de solución a través del razonamiento analógico o de estrategias especiales cuando enfrentamos nuevos problemas. Estas estrategias son procesos de búsqueda sumamente productivos porque tienen por objeto hallar nuevas estructuras y conceptos matemáticos adecuados para definir la representación mental del problema. Aclarada ésta, por fin podemos determinar la estructura matemática del problema y seleccionar el tipo de cálculo adecuado para la ejecución de la solución. Finalmente, efectuadas las operaciones, no deberíamos terminar sólo con la respuesta sino más bien, generando un proceso de comprobación de la solución por una vía alterna.

En nuestra opinión, el hecho que la resolución de problemas productivos sea un proceso tan rico y complejo, que genere el desarrollo de conceptos del lenguaje, nociones y categorías lógicas, conceptos matemáticos y estrategias de pensamiento, lo sitúan como *el proceso de orden superior más adecuado para desarrollar la capacidad de razonamiento del ser humano.*

El mismo Descartes reflexionando sobre los problemas expresó: "Cada problema que resolví se convirtió en una regla que sirvió después para hacer otros problemas". Con lo cual, aludía a *una tercera característica, muy importante en la resolución de problemas, que consiste en que al analizar la solución de un problema con una determinada estructura, estamos en condiciones de abarcar una serie de problemas análogos.* Estos problemas pueden constituirse en una red de problemas afines que nos proporcionan dominio sobre un determinado campo conceptual de problemas. Visto de ese modo, según Orton,[25] la resolución de problemas puede considerarse la verdadera esencia de la matemática. En este mismo sentido, Gagnè afirma que la resolución de problemas es la forma más elevada de aprendizaje matemático.

Una cuarta característica de los problemas es su relativa dificultad. Lo importante en un problema es que su solución constituye para el que aprende una novedad que encuentra después de sortear un obstáculo. La resolución de un

[24] Orton, A. Didáctica de las matemáticas. Morata, Madrid, 1998, pp. 50.
[25] Loc. Cit.

problema en este sentido debe proporcionar el goce intelectual y emocional, que genera todo reto mental. Por lo mismo su no solución produce cierto tipo de frustración interior, inseguridad e incompetencia porque el sujeto considera que le falta capacidad de razonamiento.

Sin embargo, en nuestra opinión tal sentimiento es injustificado porque la solución eficaz no depende sólo de la capacidad de razonamiento del sujeto sino esencialmente de que éste posea en la memoria de largo plazo, los conocimientos y las estrategias requeridas como premisas tácitas de su inferencia deductiva o analógica. Por lo tanto, la resolución de problemas, depende de la adquisición de una base rica de conocimientos de las cuales el sujeto debe aprender a sacar ventaja, a través de la inferencia.

¿Podemos ayudar a los niños a ser buenos resolutores de problemas matemáticos? Al analizar la tesis de Polya y su consecuente aplicación de los principios gestálticos debemos aceptar que es posible establecer en los estudiantes ciertos hábitos y con ello cierto grado de preparación para que lleguen a resolverlos mejor. Sin embargo al revisar la posición de Ausubel vemos que el adiestramiento juega un papel limitado sólo a ciertos campos que se van extendiendo a medida que se van cubriendo en forma específica y limitada, puesto que el problema de la transferencia de un campo conceptual de problemas a otro, no está comprobado. En este sentido Gagnè ha llegado a declarar que probablemente no podamos enseñar a los niños una fórmula para resolver mejor los problemas en general.

En conclusión, la característica de la dificultad es inherente a la naturaleza de los problemas y aunque la enseñanza de estrategias dota al niño de un maravilloso arsenal para trabajar mejor en algunos campos conceptuales de problemas, no podemos asegurar que al proporcionárselas le estamos enseñando a resolver problemas de todos los campos posibles. Si ello ocurriese, entonces el reto de la novedad y del obstáculo a vencer desaparecería, y con ellos también lo esencial del problema.

Veamos por ahora los elementos que intervienen en la resolución de un problema matemático textual. Aunque no los trataremos específicamente, también existen otro tipo de problemas matemáticos que se presentan con otro tipo de soporte, especialmente con tablas, gráficos e imágenes.

2.2.2. Los elementos en la solución de problemas

Las premisas del texto del problema como punto de partida.

Vamos a tratar en primer lugar la función de las premisas del texto en cuanto son significados del lenguaje usual, luego hablaremos de las barreras que puede crear el lenguaje y por último haremos una somera revisión de la normativa para estandarizar la escritura de problemas matemáticos.

2.2.2.1. Las premisas del texto y su significado en el lenguaje usual

Si el estudiante no conoce los significados del **lenguaje usual** y por eso “no comprende el texto que lee” no podrá resolver con éxito el problema. Lo mismo le sucede a una persona que no puede extraer la información de un cuadro de datos porque no puede interpretarlo ni procesar su significado, o a un niño cuando no puede verbalizar la situación problémica que se le plantea en una lámina. Al respecto, podemos anotar que es muy curioso que algunos niños de escuelas fiscales puedan entender mejor el problema a partir de un texto escrito que de una imagen representativa de la situación problémica[26], y ello se debe sin duda a las pocas veces que tienen la oportunidad de practicar la "lectura de imágenes".

Según se desprende de los estudios de investigación hay una estrecha relación entre comprensión de textos en lenguaje y resolución de problemas en matemática. De cada 100 alumnos con problemas en el curso de matemáticas en la escuela primaria, al menos 70 tienen también problemas en el curso de lenguaje.[27]

En la comprensión del enunciado del problema es importante considerar el alcance del niño tanto para los contenidos temáticos y conceptuales como para los asuntos de verbalización, lexicales y gramaticales. En realidad la comprensión del texto es la puerta de ingreso al problema y por eso debemos tener cuidado en la elaboración del texto tanto en la forma como en el contenido significativo. Más adelante vamos a tratar las pautas para presentar el texto del problema pero por ahora discutamos hasta que punto el lenguaje puede ser la barrera que nos limite el acceso al texto.

a. El lenguaje como barrera del problema

Ciertamente es positivo que el alumno aprenda a enfrentar un obstáculo para conocer algo nuevo porque así desarrolla su capacidad de análisis a la par que forma su carácter. Pero ponerle barreras artificiales utilizando para ello el lenguaje, es perder el sentido de la enseñanza de "la matemática a través de problemas".

Los problemas matemáticos que se centran en aspectos lingüísticos y novelescos narrando largas historias con escaso contenido matemático han recibido el nombre de "problemas cáscara" o problemas burbuja". Al respecto cabe anotar que no se niega que puedan contribuir a generar interés por la lectura y la comprensión de textos pero cuando la estructura matemática que subyace en el texto es pobre para la edad del niño, el problema no contribuye a su formación matemática. Un "problema burbuja" dirigido a niños de 10 años narraba, por ejemplo, con lujos de detalles en media página el caso de un guardabosque que encuentra un ciervo herido y tiene que trasladarlo en primer lugar hasta la posta del parque llamando a los bomberos, y luego pedir la ayuda del servicio de emergencia para sobrevolar con helicóptero una distancia determinada hasta la clínica veterinaria. La incógnita a resolver era la distancia total que debía recorrer antes de lograr salvar al ciervo.

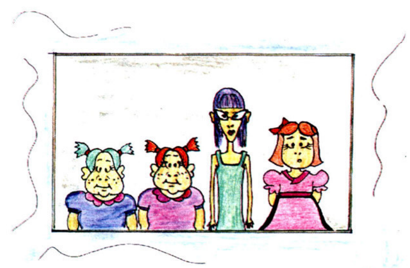
La estructura matemática no justificaba la extensión del texto pues era simplemente:

Distancia A + distancia B = Distancia total.

[26] UMC. Evaluación Nacional del rendimiento estudiantil 2004. (2º y 6º gr) Minedu, Lima, 2005.
[27] Fernanda Fernández, Llopis y otros. Niños con dificultades en las matemáticas. Ed. CEPE, Madrid, 1987.

Otro es el caso de los problemas ilustrados para niños de 7 años en el libro "La ciudad mágica de los Incas"[28]. En este texto se escriben problemas de una o dos páginas con estructuras matemáticas adecuadas para niños de 7 años pero envueltas en cierto ropaje literario.

> Cachito quedó encantado con la historia y sólo conseguía imaginar tal ciudad de los Incas. Fue entonces, en el auge de sus siete años que decidió enfrentar cualquier obstáculo para satisfacer su curiosidad, descubrir lo que tenía dentro de la caja misteriosa. Pero, quedó por un momento pensativo, pues quería descubrir cuantos años tenía su bisabuelo cuando fue hasta la entrada de la ciudad.



> La edad de Don Manco en aquel entonces era igual a suma de las edades de todas las hermanas de Cachito, sin contar a las gemelas, pues estas siempre son camotitos.
>
> Matilde tiene seis años, Carlita cuatro años, Traquina y Pira 2 años y medio. ¿Cuántos años tenía el viejito cuando estuvo en la ciudad mágica de los Incas? Si comparamos la edad del bisabuelo en aquel entonces con la de Cachito hoy, ¿Quién es más viejo?

Analizando el texto nos preguntamos si se trata de "problemas cáscara", porque las estructuras matemáticas son simples a pesar de la extensión. Este primer problema tiene nada menos que dos páginas de extensión con hermosas ilustraciones a color para la estructura:
Edad del abuelo al llegar a Cuzco = Edad de hermana A + edad de hermana B

Pero en este caso el problema tiene una condición que lo hace interesante, hay dos hermanas gemelas que no entran en la suma. Si el niño de 7 años no tiene un adecuado nivel de comprensión lectora, las incluirá. Además incluye una pregunta final sobre la diferencia de edades entre el protagonista y su abuelo.

En este caso, el texto del problema persigue competencias más amplias como desarrollar la comprensión de lectura del niño, motivar su interés como lector, estimular su sensibilidad artística con las ilustraciones, despertar su fantasía e imaginación, incitar a la reflexión con preguntas no matemáticas, y finalmente integrar los conocimientos matemáticos con otras áreas. Estos problemas los podemos llamar "problemas motivadores" y son en realidad, un pretexto para desarrollar competencias de lenguaje en niños de 7 años y hay que respetar la intención del autor de usar el lenguaje como barrera para llegar a las estructuras matemáticas porque sorteando esos obstáculos, en su opinión, el niño va a lograr una mejor comprensión de los datos numéricos en un texto.

[28] Cristina de Lemos Barbosa Sosa. "La ciudad mágica de los Incas" Enigmas y desafíos matemáticos. Ed. Colegio Particular San Juan Bosco de Huancayo, 2005.

b. Normas para la selección y escritura de problemas

Una vez que hemos aclarado el significativo papel del lenguaje en la comprensión del texto y la importancia de seleccionar adecuadamente los problemas conviene determinar ciertas normas para su escritura y selección:

a) En primer lugar es recomendable iniciar la enseñanza del tema con problemas orales haciendo mención a situaciones cotidianas o de uso en un curso que los niños estudian en forma paralela.

b) En segundo lugar es muy productivo, especialmente al iniciar la enseñanza de problemas a niños pequeños o que tienen dificultades de lectura de texto, utilizar láminas e ilustraciones. El niño debe narrar con sus propias palabras la situación problémica y ser capaz de plantear la pregunta para cerrar el problema. Pretendemos con esta técnica, perfeccionar el lenguaje descriptivo del niño y desarrollar su capacidad de percibir los aspectos problémicos de una situación.

c) En tercer lugar al iniciar al niño en el manejo de problemas con textos escritos, es conveniente hacerlo con textos breves de dos renglones y progresivamente aumentar el número de palabras. Es recomendable utilizar en principio un vocabulario normalizado acorde con el entorno cotidiano del niño y su edad mental. Luego aumentar progresivamente los términos matemáticos y sus equivalentes en el lenguaje usual.

d) Los problemas que son de nivel demasiado alto y están más allá de las posibilidades del grupo, hacen que los niños pierdan interés, porque al fracasar una y otra vez terminan por creer que el asunto consiste en aprender la solución de memoria y eso les parece aburrido. Por el contrario cuando los problemas son demasiado fáciles no existe el reto ni la emoción de trabajar en la búsqueda de algo nuevo y ello tampoco les resulta estimulante.[29]

e) Cuando se trata de problemas que requieren el uso de nuevos conceptos y por tanto el empleo de nuevas estrategias recomendamos hacerlo a través del trabajo grupal. Con este tipo de trabajo se pretende lograr que los niños intercambien ideas, contrasten estrategias, comparen soluciones y lleguen a un consenso que les permite un aprendizaje enriquecedor. Asimismo el trabajo grupal crea hábitos de responsabilidad y solidaridad.

f) Recomendamos evitar los “problemas burbuja” que son improductivos y asimismo usar moderadamente los “problemas motivadores” porque oscurecen intencionalmente la estructura matemática dentro de una envoltura literaria.

g) Consideramos pertinente usar además de problemas de texto otro tipo de formato, especialmente a través de cuadros informativos, gráficos y diseños que condensen los datos a través de imágenes para estimular el procesamiento adecuado de los mismos. Recordemos que vivimos en la era de la información gráfica y que muchos problemas textuales se pueden fácilmente cambiar de formato con ayuda de los medios audiovisuales, especialmente utilizando la multimedia.

[29] Minedu. Estructura curricular de 5º y 6º grado. Lima, 2004

h) En esta misma línea es adecuada la presentación de problemas a través de las diversas herramientas estratégicas, en especial usando todo tipo de diagramas lógicos, porque de ese modo iniciamos a los estudiantes en su uso. Es interesante que los estudiantes reciban los datos en un diagrama de Venn, en un diagrama de Carroll, en un diagrama de barras o en un cuadro de doble entrada. Del mismo modo es enriquecedor que les pidamos que trasladen los datos presentados en un cuadro de doble entrada a un diagrama de Venn, antes de desarrollar el problema y dar con la solución.

i) Pero no sólo la forma de presentación exterior debe variar sino sugerimos que esencialmente lo que debe variar es la forma de tratar el concepto. En este sentido, por ejemplo, para comprender cabalmente el sentido de la adición y sustracción es necesario presentar problemas que abarquen todos los tipos de significados posibles, y no sólo los clásicos. Así, la adición puede presentarse no sólo como **incremento,** sino también como **combinación** de subconjuntos incluidos en una clase más general y como **comparación** entre dos términos, que tienen una diferencia. Por otro lado, la sustracción puede presentarse como resto o residuo, como diferencia, como complemento o como igualación.

j) La presentación de los datos y la incógnita también puede variar. Por ejemplo, cabe formular los datos del problema y dejar que el alumno lo complete redactando la pregunta. También es posible presentar datos supernumerarios o inútiles que el alumno debe distinguir y descartar. O plantearle un problema con la incógnita pero con datos faltantes que el estudiante debe identificar como necesarios para hallar la solución. También podemos trabajar problemas abiertos que tienen una o más soluciones posibles, lo que es usual en problemas de marketing.

k) Es también recomendable trabajar problemas contextualizados, es decir que se planteen en contextos que les den significado tales como situaciones vinculadas a juegos, deportes, actividades familiares, celebraciones culturales e históricas o proyectos de la comunidad. Ocasionalmente pueden prepararse módulos de problemas en torno a uno de estos temas.

l) También pueden tomarse como temas situaciones imaginadas o creadas por ellos mismos, porque la realidad percibida por los niños es diferente a la realidad percibida por el adulto.[30]

m) Por último, recomendamos seleccionar problemas productivos, tanto que consoliden los conocimientos de un determinado campo conceptual, como que inicien al estudiante en la exploración de nuevos campos. Para consolidar conocimientos es más apropiado el trabajo individual porque fortalece el razonamiento analógico y perfecciona el uso de la base de datos de problemas en nuestra memoria de largo plazo. Pero para investigar en nuevos campos e incrementar nuestra base de datos es más apropiado el trabajo grupal porque las múltiples perspectivas de cada alumno son siempre más enriquecedoras para el análisis y la discusión sobre lo desconocido.

[30] Minedu. Estructura curricular de 5º y 6º grado. Lima, 2004.

2.2.2.2. Los términos que expresan conceptos matemáticos

Pasamos ahora a tratar los conceptos matemáticos como un elemento fundamental en la resolución de problemas. En efecto, si una persona no conoce los significados de los **conceptos matemáticos** que el problema requiere, difícilmente podrá resolverlo, a menos que posea una gran capacidad analítica y se empeñe en hacerlo. Pero a cualquier estudiante, de menor capacidad analítica, le será sencillo resolverlo, si conoce de antemano los conceptos matemáticos implicados en el problema.
En una ocasión al preparar un banco de problemas para evaluar los conocimientos de profesores estatales de 6º grado, sugerimos el problema siguiente:

"Un árbol de Navidad enciende su ciclo de luces cada 48 segundos y un nacimiento cada 36 segundos. Si se conectan por primera vez al mismo tiempo, ¿cada cuántos segundos se encenderán simultáneamente?"

La psicóloga, que asesoraba la prueba, me pidió que lo retirase porque ni ella lo podía resolver. Le tuve que explicar el concepto de mínimo común múltiplo para que lo aceptara como un problema adecuado para evaluar la comprensión de dicho concepto, que por lo demás es una noción que debe dominar todo profesor que pretenda enseñar matemática en el 6º grado. Lo curioso del asunto, es que este problema puede ser resuelto con facilidad por escolares de 6º grado, sin ser genios, con sólo haber entendido el concepto de mínimo común múltiplo, a través de un ejemplo estratégicamente graficado.

Los problemas destinados a introducir conceptos matemáticos básicos deben ser cuidadosamente seleccionados porque los conceptos son los cimientos sobre los cuales se construirá el conocimiento matemático.

Como sabemos la enseñanza problémica tiene dos vertientes: una de ellas pretende enseñar diversas técnicas y estrategias para resolver problemas cualesquiera que éstos sean, mientras que la segunda, pretende organizar la clase en torno a un problema, reconociendo una estructura matemática existente pero no evidente, a fin de profundizar en algún aspecto de un concepto matemático.

La primera vertiente, de tendencia más tradicional, insiste en la resolución de problemas aún cuando los contenidos matemáticos para su solución no han sido ni piensan ser formalmente enseñados. La segunda vertiente, que ha innovado la enseñanza problémica, pretende valerse del problema como oportunidad para conocer o profundizar en un aspecto de un concepto matemático. La idea es que los conceptos matemáticos no se agotan en las definiciones ni en unos cuantos ejemplos. Dice una especialista de esta tendencia: "El desarrollo de los conceptos se explica a partir de las relaciones que guardan unos con otros; relaciones que se dan longitudinal y transversalmente. Un concepto adquiere su sentido en función de la multiplicidad de problemas a los cuales responde. Sólo el conjunto de las diferentes situaciones, cubren las propiedades y relaciones que constituyen el núcleo del concepto"[31]

[31] Mónica Pena. El problema. Ed. Homo Sapiens, Santa Fé, 2003. P. 7

2.2.2.3. La base de datos con problemas análogos.

Un tercer elemento es tácito pero ciertamente interviene en forma decisiva en la resolución de problemas: se trata de la base de datos.

Tener como apoyo un bagaje de **problemas con soluciones similares** al que se nos plantea, nos ayuda sin duda para establecer analogías, a partir de las cuales podemos hallar un camino de solución. En realidad resolvemos problemas tanto por razonamiento inferencial como por razonamiento analógico o basado en un modelo aprendido. Si se trata de problemas que afrontamos por primera vez, necesariamente tenemos que ir más allá de la información dada a través de la inferencia, pero si se trata de problemas que repiten un esquema, lo más seguro es que los resolvamos por razonamiento analógico.

En realidad una primera vez afrontamos el problema por razonamiento netamente argumentativo y por lo tanto inferencial, de ahí en adelante si reconocemos la estructura matemática del problema no hacemos sino aplicar el razonamiento analógico. Así, mientras más grande sea nuestra base de datos mayores posibilidades tenemos de resolver el problema.

Para poseer una buena base de datos en la memoria a largo plazo es necesario haber comprendido a cabalidad el problema principal y a partir de éste los problemas derivados, que es necesario clasificar y archivar en la mente. De hecho es indispensable una buena memoria pero también es importante desarrollar en el niño, una buena capacidad de organización intelectual. Si tenemos orden mental es posible que tardemos menos en evocar la estrategia y solución que requiere determinado tipo de problema que ya hemos trabajado.

Recordemos también que la buena memoria, tan indispensable en la resolución por analogía, es tributaria de la capacidad de concentración y la voluntad de atención y organización, porque nadie puede recordar lo que no ha podido o tal vez no ha querido escuchar ni ver. Justamente la diferencia entre expertos y novatos a la hora de resolver problemas matemáticos es la cantidad de esquemas disponibles con que cuentan los expertos: ellos son capaces de utilizar amplia información porque la han archivado voluntariamente en forma organizada con miras a lograr una recuperación más sencilla Con la voluntad de organización viene la necesidad de planificar y verificar el progreso en la solución, de modo que aunque los expertos dedican más tiempo al análisis del problema, luego no pierden tiempo en "callejones sin salida ni en ideas débiles"[32]

Asimismo la buena organización que tienen los expertos al archivar su base de datos, les permite reconocer con facilidad los atributos esenciales del nuevo problema y aplicar de modo automatizado la solución por comparación o analogía con el caso archivado. De este modo, podríamos decir que la pericia de los expertos, permite reducir lo que es un problema para los novatos, en un simple ejercicio de comparación y ejecución de rutinas automatizadas.[33]

[32] Woolfolk, Anita. "Procesos cognitivos complejos" en Psicología educativa. Ed. Pearson, México, 2006. pp. 293

[33] Pozo, Juan Ignacio. La solución de problemas. Ed. Santillana, Madrid, 1999, "Las estrategias personales de expertos y novatos" pp 39.

2.2.2.4. Las herramientas estratégicas para enfrentar problemas nuevos.

Ahora bien, como hemos visto no basta el razonamiento, es necesario razonar aplicando los conceptos matemáticos asimilados. Como también hemos afirmado, muy a menudo los conceptos asimilados a través de una buena batería de problemas nos permiten identificar la solución a un problema por simple razonamiento analógico. Pero también suele suceder que se nos presentan problemas con nuevos conceptos matemáticos, que aún no conocemos profundamente y que podemos explorar a través de ciertas herramientas estratégicas, que pueden ser creadas por nuestra propia intuición pero también aprendidas a través de la práctica continua. A través de la aplicación de estas estrategias, que nos ayudan a sacar a la luz la estructura matemática de un problema nuevo, en el sentido de no conocido por quien lo resuelve, podemos "ir más allá de la información dada" y llegar a inferir el dato que necesitamos para solucionar el problema.

Por lo tanto, para enfrentar un problema nuevo, además del concepto matemático y de los cálculos de procedimiento pertinentes debemos tener a mano los conocimientos relativos a **la aplicación de herramientas estratégicas** generales, sus variados modelos y sus diversos usos.

Conviene saber por ejemplo, como utilizar la recta numérica para los recorridos en el plano, para la ubicación de sucesos en el tiempo, para la comprensión de series y sucesiones, para los problemas que implique números negativos y otros más.

Es también importante saber utilizar los cuadros de doble entrada para los problemas de compra, venta y ganancia, o de compra, venta y pérdida, para los problemas de ingresos y egresos, para los problemas de terminología técnica que requieren ubicar, por ejemplo minuendo, sustraendo y diferencia, etc…

Muchos problemas que resultan difíciles sin el auxilio de diagramas lógico-matemáticos, se simplifican enormemente con su ayuda. Entre estos tenemos los diagramas de Venn y los de Euler para los problemas de intersección de clases, los diagramas de barras y puntos para la comparación de cantidades, los diagramas de Carroll para los problemas de complemento, los diagramas de flujo para los problemas de secuencias, los diagramas de árbol para los problemas de cálculo combinatorio y los diagramas cartesianos para múltiples casos.

A partir del uso de estos diagramas el alumno aprende a elaborar diagramas ad-hoc para los problemas que presentan una novedad porque adquiere la capacidad de graficar creativamente con lápiz y papel la representación mental que tiene del problema. Precisamente una de las técnicas para lograr que el alumno resuelva un problema difícil es pedirle que represente gráficamente la relación entre los datos y la incógnita, antes de pretender que solucione irreflexivamente el problema.

Ahora bien, estas representaciones gráficas no son el producto de una norma prescriptiva estricta en el sentido de los algoritmos sino que son el producto de ciertas estrategias que describen "una manera general de proceder" y para aplicarla hay que seleccionarla, decidir que versión hay que utilizar, diseñar una adaptación creativa adecuada y luego retomar la relación con el problema original.

2.2.2.5. Las reglas de los procedimientos para la ejecución de los algoritmos.

Una vez que seleccionamos las operaciones para hallar la solución, tenemos que recordar los pasos para su ejecución. En nuestra opinión, los resultados que provienen del **cálculo algorítmico** actualmente pueden obtenerse a través del uso de la calculadora, de modo que no es totalmente imprescindible conocer los algoritmos relativos a las operaciones para resolver problemas. Para lograrlo, es mucho más importante conocer el concepto de la operación en sí, que la ejecución del algoritmo. Sobre la utilidad del aprendizaje del cálculo algorítmico en la escuela hay un debate pedagógico que trataremos más adelante y se discute incluso, hasta que punto su aprendizaje memorístico es formativo.

En los últimos tiempos, hay substanciales modificaciones en cuanto a la enseñanza de los algoritmos. En primer lugar, surge la necesidad de enseñarlo dentro de un contexto que le otorgue sentido. Si el estudiante aprende un procedimiento mecánico, cuya aplicación desconoce, no se sentirá motivado para asimilarlo, tal vez lo aprenda y lo olvide en corto tiempo.

Una forma de lograr que lo incorpore a su memoria de largo plazo, es relacionándolo con un campo de problemas. Por ejemplo, si aprende el algoritmo del MCD y MCM por descomposición factorial, sería ideal si vincula su uso al conjunto de problemas que se resuelve en ese campo. Actualmente muchos alumnos de 5º y 6º grado de primaria conocen estos dos algoritmos pero lo olvidan con facilidad porque apenas un porcentaje reducido de ellos, sabe aplicarlos en la resolución de problemas. De modo que en muchos concursos de matemática de 5º y 6º, los examinadores incluyen problemas de MCD y MCM como una gran novedad, puesto que solamente un grupo exclusivo de niños los puede resolver.

En segundo lugar, surge la necesidad de enseñar los conocimientos previos al aprendizaje del algoritmo. Así por ejemplo, para enseñar el algoritmo de la multiplicación por una cifra es necesario el conocimiento de la técnica pre-operativa de la multiplicación, en base a la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma. No se podría desde luego, enseñar la aplicación de la distribución, sin el conocimiento del concepto y las propiedades de la multiplicación, y sin el aprendizaje memorístico de la tabla de multiplicar. Todo algoritmo requiere una lista de pre-requisitos que tenemos que satisfacer antes de iniciar su enseñanza, porque el aprendizaje mecánico sin la comprensión de los pasos previos, no favorece la asimilación del algoritmo en la memoria de largo plazo, ni su ágil aplicación mecánica y los algoritmos de las operaciones básicas, si han de usarse, deben ser un tipo de aprendizaje permanente y ágil, como herramientas siempre a mano para la resolución correcta de problemas.

En tercer lugar, conviene insistir sobre la necesidad de la exactitud de los resultados. Tal vez un cálculo mental previo nos ayude a decidir que si multiplicamos 348 x 203 nos debe salir un resultado cercano a 350 x 200, es decir a 70 000, pero, a menos que aceptemos el uso de la calculadora, será necesario que el estudiante conozca el algoritmo por el cual pueda afirmar que el resultado exacto es 70 644.

Al respecto, un aspecto interesante para un maestro consiste en descubrir los algoritmos alternativos que existen para cada operación y como cada uno de ellos, se basan en diversas propiedades matemáticas, o a veces, en consideraciones de orden de ejecución de los pasos. Por ejemplo, el algoritmo de la sustracción americano se basa en la reagrupación mientras que el algoritmo alemán de la sustracción, se basa en la propiedad de la constancia de la sustracción. Sin embargo en la multiplicación ambos países usan la propiedad distributiva, pero mientras los americanos empiezan por las unidades, decenas y centenas, los alemanes desarrollan el proceso a la inversa comenzando por los centenas, decenas y terminando por las unidades.

Cuando los escolares se dan cuenta que los algoritmos no son únicos sino que hay diferentes opciones, tienen una idea más cabal de las operaciones matemáticas. Lo mismo sucede cuando aprenden a operar en bases no decimales: sumar en base cuatro les da una idea mucho más amplia del significado del algoritmo de la adición.

Hay una discusión sobre si conviene presentar los diversos algoritmos a los escolares y luego invitarlos a mecanizar el uso de uno determinado o si deberíamos presentar un único y determinado modelo. En nuestra experiencia, en el nivel de 5º y 6º, aunque el profesor debe conocer los algoritmos alternativos, debe presentar uno sólo en clase, a fin de lograr la automatización adecuada sin la interferencia de los otros procedimientos. Pero también hay una discusión respecto a que si deberíamos enseñar la automatización en el manejo de los algoritmos que consume horas de entrenamiento, en lugar de utilizar ese tiempo precioso en el razonamiento con problemas. Vamos a tratar y discutir este asunto en el siguiente punto porque el asunto exige una aclaración.

Por último, cabe señalar que no sólo hay algoritmos vinculados a la ejecución de operaciones sino que también hay algoritmos para la resolución de problemas aritméticos. Entre ellos tenemos los algoritmos indicados por las fórmulas para hallar dos números, dados la suma y diferencia de los mismos, o los utilizados para hallar el perímetro y el área de las figuras o el volumen de los cuerpos geométricos. En este caso el algoritmo prescribe la completa solución del problema y el alumno se limita a identificar los elementos. Podría decirse que con el aprendizaje del algoritmo se facilita la solución del problema hasta casi transformarlo en un mero ejercicio reproductivo. En este caso la algoritmización del problema termina por anularlo como tal pero ese es justamente el objetivo del experto.

Por eso, un aspecto interesante para un maestro es aprender a algoritmizar pero no para prefabricar las respuestas a los problemas de sus alumnos, sino para tener clara conciencia del trabajo matemático. En efecto, sin la algoritmización no sería posible la aplicación de una ciencia matemática a nivel general pues gracias a ella los usuarios de la matemática pueden resolver la mayoría de los problemas sin tener que pensar estrategias matemáticas creativas en cada ocasión. En este sentido, un algoritmo matemático creado y demostrado con gran inventiva por un matemático, juega un papel decisivo en el trabajo profesional de un ingeniero, por ejemplo, quien al aplicarlo como una simple fórmula, ahorra tiempo y esfuerzo.

2.2.2.6. Las reglas para la aplicación del cálculo mental como alternativa al uso de algoritmos.

Sin embargo en el aula de clase no conviene apresurar la enseñanza de los algoritmos, hasta que el alumno puede racionalmente asimilar los conceptos que le sirven de base. En este sentido, en los primeros grados, el conocimiento oportuno del **cálculo mental** permite resolver los cálculos simples con celeridad sin necesidad de aplicar el algoritmo. Pero aún cuando se trata de cálculos complejos donde tenemos que aplicar un algoritmo, el cálculo mental, que es un procedimiento mental más simple e intuitivo, nos permite anticipar un resultado aproximado que nos ayuda a comprobar la solución. Tener por adelantado un resultado aproximado de la solución nos ayuda a no cometer gruesos errores y a descartar de antemano resultados absurdos.

Vamos a considerar si el algoritmo es un elemento esencial en la resolución de problemas y si es posible sustituirlo por el uso de la calculadora. En todo caso vale la pena considerar que el cálculo mental también puede ser un elemento interesante para la ejecución de operaciones.

a. ¿Es imprescindible el uso del calculo algorítmico?

Actualmente muchos educadores piensan que el cálculo algorítmico ya no es necesario para la resolución de problemas.[34] Incluso existen universidades inglesas que han experimentado la enseñanza de problemas con la ayuda de la calculadora, para que la resolución de las operaciones no sea un obstáculo para desarrollar la estrategia de solución, logrando grandes avances en el razonamiento con problemas y sobre todo utilizando cifras difíciles de manejar pero que corresponden a situaciones concretas. Veamos el caso del proyecto CAN.

El proyecto CAN, Calculator Aware Number Project, con sede en Hommerton College de Cambridge, bajo la dirección de Hillary Shuard,[35] se inició formando parte de del proyecto PRIME, que pretendía elaborar un enfoque de la matemática en la escuela primaria basado en la comprensión, exploración e investigación. Su propósito fundamental era enseñar matemática para la resolución de problemas con la calculadora en la mano, siempre que fuera posible, para no privar a los niños de un instrumento de cálculo actual, de grandes posibilidades y de uso muy extendido. Los promotores del proyecto CAN pensaron que si el maestro no enseña a los alumnos como usar técnicamente la calculadora, ellos de todos modos la utilizarán en casa de manera inapropiada, considerando anticuada la matemática que se enseña en la escuela.

Como resultado de esta experiencia los niños no han aprendido una forma imitativa normalizada de algoritmo, que es un saber reproductivo sino que "en matemática uno piensa las cosas por su cuenta" que es la base del conocimiento productivo.

---

[34] Ellos entienden el cálculo algorítmico como un proceso determinado por reglas escritas e invariables que se aplican en una secuencia ordenada y que llevan a un resultado concluyente.

[35] "Constructivismo" en A.Orton. Op. cit. pp 203-204

En nuestra opinión el uso de la calculadora tiene la gran ventaja de utilizar cifras con datos concretos cuyo manejo es a veces técnicamente complicado, pero por otro lado, corremos el riesgo que los alumnos entusiasmados por la calculadora se nieguen a utilizar la mente para calcular. Entonces es necesario preguntarnos: ¿Es formativo el aprendizaje del cálculo? En primer lugar hay que distinguir entre el cálculo mental y el cálculo algorítmico.

El cálculo mental es un conjunto de técnicas para calcular sin utilizar lápiz ni papel y en este sentido desarrolla y agiliza la mente del sujeto que lo practica. Algunos matemáticos afirman que el cálculo mental es una especie de procedimiento algorítmico de la mente, semiformal, intuitivo y personal, que va generando reglas que con el tiempo pueden dar lugar a algoritmos formales. Es una idea interesante, aunque tal como se enseña dentro de la escuela alemana, el cálculo mental se apoya en la memoria y la manipulación de material concreto para los primeros cálculos básicos y luego en la aplicación de las propiedades matemáticas para los cálculos posteriores. En este sentido dota al sujeto que lo practica de un conocimiento práctico en la aplicación de propiedades.

Por oposición, el cálculo algorítmico es un procedimiento mecánico, rutinario y memorístico, determinado por reglas escritas y fijas que se aplican en una secuencia de pasos determinada y llevan necesariamente a un resultado concluyente. En este sentido, el algoritmo facilita la resolución de problemas en el rutinario trabajo profesional, ahorrando tiempo y esfuerzo, pero como lleva a la mecanización del conocimiento no genera pensamiento productivo sino exclusivamente reproductivo. De modo que cuando llegamos a algoritmizar la solución de un problema, facilitamos su resolución para el sujeto que lo enfrenta pero el problema deja de ser problema y se convierte en un ejercicio rutinario.

Otro asunto es el dominio de los algoritmos de las operaciones básicas de cálculo. ¿Cuánto tiempo debemos dedicar para que el alumno domine los algoritmos operativos sin cometer errores de cálculo? En pocas palabras, ¿tiene actualmente sentido dedicar tantas horas como antaño al dominio del conocimiento reproductivo dejando de lado el conocimiento productivo? Hay que tener en cuenta que para cálculos extensos que demandan largos y monótonos procesos, hoy existe la calculadora de bolsillo, que puede complementar con más eficiencia nuestro trabajo y que por otro lado, nuestra sociedad del conocimiento exige, más que un conocimiento reproductivo, una alta demanda de conocimiento productivo y de trabajo grupal.

Por esta razón, si se trata de aplicarlo en el aula escolar, el cálculo mental se muestra superior pues estimula la agilidad mental, la creatividad del sujeto y la interacción grupal.[36] Es necesario aclarar, que aunque el cálculo mental no tiene reglas fijas, usa los principios de la analogía, la descomposición para reemplazar operadores y la propiedad de la distribución para operar mentalmente. Si bien no hay reglas fijas porque el cálculo mental se amolda a la mente particular del sujeto, existen diversas estrategias recomendadas basadas en estos principios.

[36] Un juego de cálculo mental de trabajo grupal es el fútbol aritmético, donde dos equipos compiten para encontrar operaciones combinadas con 5 números dados, que den como resultado el número indicado en el arco del equipo contrario.

Sirve, no sólo para cálculos con números hasta 20, sino que también por analogía sus técnicas se pueden trasladar a los cálculos hasta 100 y hasta 1000. Lo fundamental, es que se trata de técnicas que se aplican en forma flexible, ofreciendo en cada caso diversas alternativas que el sujeto debe escoger según corresponda. Esto le confiere la capacidad de analizar y decidir con rapidez y evita la mecanización memorista que tanto se ha criticado en la enseñanza de los algoritmos en el aula escolar de nivel elemental.

b. Los principios del cálculo mental

Aunque como dije, no hay reglas fijas de cálculo mental, se suelen utilizar ciertos principios básicos de cálculo mental, que la mente humana encuentra más naturales que los elaborados caminos algorítmicos. Estos principios se basan en propiedades y se aplican de manera flexible para agilizar la realización de los cálculos.

Entre ellos tenemos:
- Principio de analogía
- Principio de descomposición
- Principio de distribución

• a. Principio de analogía

Se resuelven los cálculos por comparación con una situación anterior. Por ejemplo por comparación con la decena, centena o millar anterior. Así, si un niño puede captar que 2 + 3 = 5 será capaz de deducir por analogía que 20 + 30 = 50 o que 200 + 300 = 500. Si el doble de 4 es 8, entonces el doble de 40, será 80 y el doble de 400, será 800.

• b. Principio de descomposición

Se resuelven los cálculos descomponiendo los términos de modo que se realicen dos operaciones más simples en lugar de una compleja. Por ejemplo, si un niño tiene dificultad para efectuar 15 x 18, puede descomponer el operador x 18, en dos operadores x2 y x9 y efectuarlo como:

15 x 18 =
15 x (2 x 9) =
(15 x 2) x 9 = 30 x 9 = 270

Para el caso del campo aditivo se descompone igualmente el operador, buscando en este caso completar el número a la centena siguiente:

480 + 60 =
(480 + 20) + 40 =
500 + 40 = 540

Para el caso de la resta descomponemos el operador, buscando en este caso la centena anterior:

940 – 50 =
(940 – 40) – 10 =
900 – 10 = 890

• c. Principio de distribución

El cálculo mental usa con mucha frecuencia la propiedad distributiva para multiplicar y dividir. La propiedad distributiva permite el desarrollo de la creatividad y la imaginación matemática porque no hay una forma única de aplicarla.

Así por ejemplo puedo multiplicar mentalmente 5 x 18 de distintas formas:

<u>5 x 18 = 90</u>	<u>5 x 18 = 90</u>
5 x 10 = 50	5 x 20 = 100
5 x 8 = 40	-(5 x 2)= -10

Los mismos procesos se pueden usar para obtener rápidamente el doble y la mitad.

<u>El doble de 85 es 170</u>	<u>La mitad de 170 es 85</u>
El doble de 80 es 160	La mitad de 160 es 80
El doble de 5 es 10	La mitad de 10 es 5

c. Las formas de aplicación del cálculo mental

La aplicación del cálculo mental facilita en gran medida los procesos de estimación y resolución de problemas. Su uso abarca un espectro muy amplio de operaciones pues el cálculo mental no sólo se aplica a las operaciones básicas del campo aditivo y multiplicativo sino también al campo de la teoría de la divisibilidad, especialmente cuando se trata de determinar el MCM y el MCD.

Lo ideal es que el sujeto desarrolle técnicas de cálculo mental de los 5 a los 10 años jugando didácticamente de 5 a 15 minutos diarios. Si las estrategias de cálculo mental van ligadas al juego didáctico, el grado de motivación e interés es muy alto y genera excelente aprendizaje.

En nuestra opinión para iniciar la enseñanza de una nueva estructura de problemas es mejor utilizar ágiles operaciones de cálculo mental que pueden escribirse como cálculo horizontal que largas operaciones de cálculo algorítmico, que puede resultar desmotivantes. En este sentido las operaciones breves hacen innecesario el empleo temprano de la calculadora. Si bien es cierto, a menudo el uso de cifras breves no corresponde a los datos precisos de la realidad, tiene una increíble ventaja para *hacer que el cálculo no sea el obstáculo de la resolución del problema y centrar el asunto en el razonamiento, que es donde efectivamente debe situarse.*

En conclusión:

Para resolver un problema es necesario superar la barrera del lenguaje a través de la comprensión del texto, conocer los conceptos matemáticos pertinentes, contar con una batería de problemas para resolver por analogía y desarrollar herramientas estratégicas para enfrentar nuevos problemas. Pero además, si no aceptamos el uso de la calculadora, necesitamos enseñar los algoritmos y los procedimientos de cálculo mental para resolver las operaciones planteadas.

De modo, que quien desee enseñar a resolver problemas, debe avocarse a analizar por un lado esa batería de problemas según los diversos **campos conceptuales,** enseñar al menos cálculo mental y por otra parte, debe propiciar el uso de esas **estratégicas herramientas creativas** que nos ayudarán a enfrentar los problemas que representen una novedad y por ende un desafío para nuestro intelecto.

2.3 Definiciones conceptuales de los términos básicos.

Antes de concluir este capítulo conviene precisar el sentido de los términos que hemos usado con la ayuda de este pequeño glosario.

2.3.1. Problema matemático

Es un conjunto de proposiciones dadas a través de un texto escrito o de una imagen que se constituyen en los datos conocidos a partir de los cuales es necesario hallar uno o más datos desconocidos llamados incógnitas cuyas determinaciones se presentan como un obstáculo a vencer. El proceso de solución de un problema se realiza a través de un proceso intelectual que consiste en descubrir los conceptos matemáticos y la estructura matemática a partir de los datos y las condiciones dadas. Hallar el proceso adecuado requiere la aplicación de diversas estrategias a las que siguen la aplicación del procedimiento matemático pertinente bien de cálculo mental o de cálculo algorítmico.

2.3.2. Concepto matemático

Son los conceptos que expresan ideas matemáticas utilizando tanto el lenguaje usual de forma precisa y concisa como también el lenguaje simbólico. Con frecuencia estas ideas subyacen en las estructuras del mundo real y pueden tener una comprensión intuitiva especialmente en el campo de la Aritmética. Pero cuando se generalizan en el Álgebra, adquieren una significación formal cuya comprensión supone un alto nivel de abstracción.

2.3.3. Razonamiento inferencial deductivo

Es el razonamiento que permite ir más allá de la información dada pues a partir del conocimiento de una o dos proposiciones llamadas premisas nos permite pasar a través de reglas de deducción al establecimiento de la verdad de una tercera llamada conclusión.

La inferencia nos dice que si A es verdadera entonces B que se deduce de ella, es también necesariamente verdadera. Si partimos de premisas verdaderas la inferencia se llama concluyente. La inferencia no nos asegura nada si partimos de A, cuando esta proposición es falsa, ya que de una proposición falsa podría deducirse lógicamente otra verdadera o una falsa.

2.3.4. Razonamiento analógico

Es el razonamiento donde la conclusión se establece por comparación con una situación anteriormente aprendida. Muchos cálculos mentales se resuelven por analogía, por ejemplo 30 + 40 = 70 porque 3 + 4 = 7. Igualmente muchos problemas se resuelven por analogía cuando hemos asimilado una estructura lógica que corresponde a un campo conceptual de problemas. Por ejemplo los problemas de venta, costo y ganancia.

2.3.5. Algoritmo

Un **algoritmo** matemático es un procedimiento mecánico, rutinario y determinante, que consta de varios pasos organizados en una secuencia y que llevan a un resultado concluyente. Los algoritmos pueden ser **decisorios**, cuando nos llevan a decidir por un si o por un no, tal es el caso por ejemplo, cuando nos preguntamos si 323 es o no un número primo. En este caso, aplico un procedimiento mecánico y decido, si el número en cuestión es primo o no lo es. Pero otras veces los algoritmos pueden ser numéricos, cuando tienen como objetivo la exhibición de un número determinado, por ejemplo, cuando se trata de hallar por descomposición en sus factores primos el mínimo común múltiplo de 48, 60 y 90, o más simplemente el producto de 325 por 203. En ambos casos tengo que aplicar un procedimiento rutinario, cuya aplicación tengo que conocer de memoria, y seguirla paso a paso hasta llegar siempre a la exhibición de un número determinado.
La creación y demostración de algoritmos matemáticos es una de las tareas más valiosas que realizan los matemáticos a favor de la comunidad de usuarios de la ciencia, quienes al aplicarlos, ahorran tiempo y esfuerzo. Sin embargo, la temprana e inadecuada algoritmización de la enseñanza escolar, puede ser contraproducente y ocasionar el rechazo de los aprendices.

2.3.6. Cálculo mental

Es el cálculo estratégico que se apoya en elaboraciones mentales sin necesidad de recurrir al procedimiento de reglas escritas. Puede basarse en la memoria, la inferencia por analogía o la aplicación espontánea de propiedades matemáticas.

Por oposición al cálculo algorítmico, el cálculo mental no tiene reglas fijas y aunque pueden enseñarse principios y estrategias de cálculo mental, éstas pueden ser usadas en forma flexible y con la mayor libertad. De este modo el cálculo mental permite la intuición de nuevas estrategias y el aporte personal y creativo del sujeto.

2.3.7. Herramientas estratégicas

Son los instrumentos que nos ayudan a visualizar intelectualmente la solución a un problema. Entre ellos tenemos:

a) Elaboración de cuadros de datos del problema
b) Cuadros de doble entrada
c) Tablas de operadores
d) Tablas de proporcionalidad
e) La recta numérica

f) El diagrama cartesiano
g) El diagrama de flujo
h) El diagrama de Venn
i) El diagrama de Euler
j) El diagrama de Carroll
k) El diagrama de árbol
l) El diagrama circular
m) Los cuadros de barras
n) Los cuadros de doble barra
o) Los diagramas de puntos.
p) Los pictogramas

2.3.8. Objetivos formativos en la resolución de problemas

Son los objetivos pedagógicos que pretendemos alcanzar en el proceso de enseñar a nuestros alumnos a solucionar problemas. Hablamos de tres objetivos formativos:

a) Enseñarles a **matematizar,** es decir a descubrir estructuras matemáticas en situaciones problémicas de la vida real y aplicar estas estructuras en el estudio de otras disciplinas como las Ciencias Naturales y las Ciencias Sociales.

   Esto significa no sólo comprender la estructura matemática de un problema dado sino escribir un problema matemático, dada la situación problémica. Se suele iniciar al niño a partir de láminas con situaciones cotidianas o redactando las preguntas faltantes.

b) Enseñarles a **argumentar**, es decir a utilizar el razonamiento deductivo y analógico sin cometer falacias ni caer en contradicciones. En el razonamiento analógico disponemos de modelos pre-determinados que vamos almacenando en forma organizada, a partir de los problemas que vamos resolviendo y asimilando a nuestra base de datos. En el razonamiento puramente deductivo no disponemos de modelos de apoyo y nos enfrentamos a la necesidad de inferir.
   Para enseñarles a argumentar conviene proponer problemas que tengan varias soluciones posibles pues de ese modo cada grupo puede aportar una argumentación diferente y se pueden contrastar los diversos modos de encarar el problema.

c) Enseñarles a **ser creativos** a través del uso de las herramientas estratégicas, que se aplican en forma muy flexible de acuerdo a los datos del problema, y que le permitirían visualizar objetivamente la solución. Estimulamos la creatividad al proporcionar a los alumnos problemas que les exijan la intuición de nuevos conceptos y el empleo de nuevas estrategias de solución. También estimulamos la creatividad cuando realizamos concursos para la mejor representación gráfica del problema planteado. Otra forma de estimular la creatividad consiste en dar la estructura simbólica de las operaciones para que los alumnos a través del trabajo grupal, construyan un problema en palabras del lenguaje usual.

2.3.9. Formas de utilizar el concepto de número en la escuela primaria

Distinguimos en nuestra metodología cuatro usos comunes:

a) El número que cuenta, que es el número cardinal

b) El número que ordena, que se refiere al número ordinal

c) El número que mide, que se refiere al número acompañado de una unidad de medida, tal como 3 m, 4 kg o 20 min.

d) El operador o número que opera **es el número que expresa una orden de cálculo.** Téngase en cuenta que decir **2** es algo diferente a decir "**+2**", "**-2**", "**x2**" o "el doble" y "**:2"** o "la mitad". Tal diferencia se da porque el operador es el número en la función de tener asignada una operación de cálculo. Generalmente el operador se coloca en una proposición matemática después de otro número, pero también tiene sentido usar el operador en forma aislada. Por ejemplo, podemos decir que el operador "x 12" se puede descomponer en los operadores "x 2" y "x 6" o que el operador "+ 7" puede descomponerse en los operadores "+ 3" y "+ 4". Hablar de operadores nos permite plantear la descomposición de operadores para facilitar el cálculo mental y estimativo, de gran importancia para la resolución de problemas.

Capítulo III
Análisis de los pasos para la solución de problemas

3.1. El enfoque problémico y nuestro programa.

Esta tesis será desarrollada desde la óptica del enfoque problémico. **El enfoque problémico** se acerca en los principios de matematización y argumentación a la concepción cognitivo-constructiva, desde la cual elaboramos la tesis de maestría, pero se distingue de ésta porque prioriza los contenidos significativos de la realidad que subyacen a los conceptos, enunciados y fórmulas matemáticas.

Ahora bien, en el enfoque problémico tenemos dos vertientes. La primera consiste en enseñar al alumno estrategias para solucionar problemas. Se pone énfasis en las estrategias y se trata que el alumno logre ser un buen resolutor o solucionador de problemas.

Los profesores que utilizan esta tendencia generalmente emplean dos estilos: el **aprendizaje por ósmosis** que consiste en proporcionar una batería tan grande de los diversos problemas escolares que el niño aprende absorviendo la técnica por el número de problemas resueltos y el **aprendizaje por modelos**, que consiste en plantearle problemas seleccionados como problemas claves y formativos, y luego resolverlos con el niño para que observe y asimile la técnica.

Con bastante frecuencia hemos observado **el aprendizaje de problemas por ósmosis** en los colegios de Lima. Se le proporciona al niño separatas de 50 problemas variados cada 30 días y se espera que los devuelva resueltos con el procedimiento que elija libremente. Este método implica cantidad, aunque no necesariamente proporciona calidad puesto que el profesor no realiza una selección de acuerdo a un criterio. En muchos casos el alumno asume la abrumante tarea como parte del método de su colegio, y efectivamente investiga y aprende, pero en otros, cuando el método no va acompañado de una concientización del estudiante, éste copia la tarea de sus compañeros o pide ayuda a un adulto, llegando incluso a contratar un profesor particular para que se los resuelva.

Mientras que en el **aprendizaje por modelos,** he observado que el maestro da los problemas tipo como modelos estándar, a partir de los cuales selecciona variaciones derivadas que el alumno puede deducir. Este método no implica necesariamente cantidad pero si se preocupa por la calidad de los problemas seleccionados y sobre todo porque éstos respondan a modelos trabajados en clase y que por tanto, el alumno sea capaz de manejar sin tener que recurrir a un tercero. El uso de este método contribuye a aumentar la base de datos del alumno y genera cierto grado de aprendizaje porque implica pequeñas variaciones sobre un modelo básico. Este método lo hemos observado en profesores que se apoyan en textos como el de Baldor, donde el alumno, una vez que asimila el modelo básico, es capaz de resolver los problemas que se derivan de éste. Este método genera sin duda aprendizaje, sobre todo cuando los problemas propuestos se van alejando del modelo para plantear al estudiante un reto interesante. Sin embargo, genera una actitud muy especial en los estudiantes, que se acostumbran a buscar el modelo que les ha de servir de guía y cuando no lo encuentran, se sienten totalmente perdidos, sin estrategias para abordar el problema.

Incluso, cuando el profesor se atreve a evaluarlos con un problema fuera de los modelos aprendidos, protestan, "porque ese problema no estaba en el cuaderno". En este método los modelos presentados son generalmente una aplicación del tema y por eso, casi siempre se desarrollan como parte final del concepto y de las técnicas aprendidas.

Desde nuestra perspectiva es más productivo cuando los problemas, antes que aplicación, son en primer lugar un vehículo para presentar la necesidad e importancia del concepto y luego como aplicación no se limitan a modelos artificiales sino que toman en cuenta lo que acontece en el mundo real y en las investigaciones de otras disciplinas. Por eso, nos interesa la segunda vertiente del enfoque problémico, especialmente porque sus seguidores proponen desarrollar la enseñanza de la matemática centrada en la resolución de problemas y en este caso, la enseñanza se orienta a presentar los diversos conceptos matemáticos a través de problemas del mundo que nos rodea en sus diversos aspectos: cotidiano, social, económico y político. Pero en segundo lugar también se orienta a dar una mirada al mundo de la cultura y por eso insiste en el trabajo interdisciplinario que permite al estudiante relacionar la matemática con las otras disciplinas de estudio pero especialmente con el mundo de las ciencias naturales, las ciencias económicas y las ciencias sociales.

Por lo tanto debemos concluir que en esta segunda vertiente la enseñanza matemática se centra en la resolución de problemas para la vida y la interrelación de la matemática con el mundo cultural de las diversas disciplinas. Pero también aquí hay diferentes estilos de trabajo: cuando se realiza el enfoque interdisciplinario es usual el estilo **de trabajo grupal**, a veces combinado con el **método de proyectos**, que justamente posibilitan la resolución de problemas de diferentes áreas pero que usado en forma exclusiva, puede ser inadecuado porque no todo el estudio de la matemática es integrable en proyectos.

Respecto al **método de trabajo grupal** he observado que es más productivo cuando se reserva para los problemas propuestos que implican novedad y que requieren el uso de estrategias creativas. En la medida que se alejan de los modelos trabajados en clase, estos problemas hacen necesario el intercambio de ideas y de una saludable discusión grupal para ser abordados con éxito. Cuando los problemas son más bien derivaciones de modelos trabajados en clase, vale más que los alumnos trabajen individualmente, para recuperar de su memoria a largo plazo, el modelo apropiado y activar su uso en la memoria de trabajo.

Pero un estilo de investigación más interesante es el enfoque problémico a partir de la **teoría de los campos conceptuales** de Vergnaud,[1] donde se trabaja cada concepto matemático con una rica gama de problemas que permite interiorizar las diversas facetas del concepto, sólo apreciable a través de una adecuada muestra. Esta me parece la perspectiva más apropiada porque aquí no interesa que el alumno sea un resolutor competente de todos los problemas ingeniosos y difíciles que se le presenten sino más bien, el objetivo fundamental es que profundice en un concepto matemático determinado a través de un conjunto de problemas seleccionado, como una forma de acceder paulatinamente a un universo matemático integrado y coherente.

[1] Gérard Vergnaud, psicólogo francés, perteneciente a la comunidad de teóricos franceses dedicados a la Didáctica de la matemática, es el creador de la Teoría de los campos conceptuales (TCC), que intenta explicar el proceso de formación de conceptos matemáticos en los niños.

Los textos cubanos basados en la enseñanza de problemas, son un buen ejemplo de enseñanza problémica. Al respecto la obra de Joaquín Palacio Peña es bastante ilustrativa,[2] pero está aplicada a la enseñanza secundaria, nivel que parece más apropiado para su desarrollo porque en esa etapa los estudiantes poseen la capacidad de abstracción más desarrollada para alcanzar conceptos matemáticos más estructurados.

Para los profesores de primaria presentar la matemática a base de problemas implica un reto. En primer lugar es necesaria una rigurosa selección de los conceptos matemáticos que los niños son capaces de abstraer de acuerdo a su corta edad y al medio ambiente en que se desarrollan.

En segundo lugar es menester escoger los temas motivadores que servirán de vehículo de transmisión. El método italiano “Numeri e cose”[3] señala por ejemplo en el libro para 5º grado 144 problemas de 10 temas diferentes: lógica (18), estadística (11), informática (11), combinatoria (10), probabilidad (6), cálculo de la vida diaria y comercial (24), razonamiento geométrico (31), medidas (8), fracciones (11) y razonamiento numérico (14). El método italiano “Non solo numeri”[4] propone para el mismo grado 114 problemas de 7 áreas: Lógica (23), Aritmética, que comprende problemas con fracciones y decimales (45), Geometría (19), Medidas (8), Informática (7), Estadística (6) y Probabilidad (6).

En tercer lugar, presentar la clase de matemática centrada en problemas supone una adecuada combinación de los problemas con la enseñanza de las técnicas de cálculo mental y algorítmico. La enseñanza del cálculo es básica como instrumento y como elemento formativo de agilidad mental y no debería relegarse en ningún caso. Pero efectivamente no tiene mucho sentido enseñar operaciones sin problemas y cada concepto matemático debería ser introducido con un problema, incluso debería ser desarrollado con una secuencia organizada de problemas y debería contar con una buena batería de problemas de aplicación a los diversos campos disciplinarios. Esto no se opone al desarrollo intercalado de las operaciones y otros procedimientos de tipo algorítmico que deben ser practicados para desarrollar con solvencia los problemas matemáticos, a menos que postulemos un enfoque problémico radical que sustituye totalmente los cálculos por el uso de la calculadora.

El enfoque problémico sin el uso de algoritmos han sido propuesto por el CAN Project, Calculator aware number, con sede en el Homerton College de Cambridge, bajo la dirección de Hilary Shuard[5] en 1990, como ya los señalamos al tratar el tema de problemas y uso de algoritmos.

Recordemos que este proyecto comenzó con la elaboración de un enfoque de la matemática en la escuela primaria de carácter exploratorio e investigador y terminó abogando por el uso de la calculadora. Su intención básica era enseñar matemática al niño con una calculadora en mano siempre que fuera posible, para no privarlo artificialmente de un instrumento potente y útil cuyo uso se halla extendido.

---

[2] Joaquín Palacio Peña. Didáctica de la matemática. Búsqueda de relaciones y contextualización de problemas. Ed. Fondo Editorial del Pedagógico de San Marcos, Lima, 2003.
[3] Marcella Palazzolo. Numeri e cose. Ed. La Scuola, Brescia, 1993.
[4] Volpati-Villa. Non solo numeri. Ed. Il Capitello, Torino, 1995.
[5] A. Orton. Didática de las matemáticas. Morata, Madrid, 1998. Pp. 203.

Como afirma Orton, quien nos informa sobre este programa, en el contexto inglés, esta propuesta significó una revolución que fue calificada inmediatamente de sospechosa, especialmente por el sector de la comunidad, adicta al uso de los cálculos con lápiz y papel, muchos de los cuales ni siquiera eran educadores.

En nuestra opinión, tal vez la postura de CAN fue demasiado radical pues no consideraba que el uso de la calculadora puede privar al alumno de la ejercitación en el cálculo mental, que es un entrenamiento intelectual que agiliza la mente. Pero, por otra parte, es cierto que si las calculadoras no se introducen en el currículo de matemáticas de algún modo adecuado, los alumnos las utilizarán en casa, considerando anticuadas las matemáticas escolares.

Según Orton, en CAN los investigadores llegaron a las siguientes conclusiones:

1. Los niños de este programa confiaban más en sí mismos y se mostraban más dispuestos a explorar relaciones matemáticas.

2. Los maestros desarrollaron su enseñanza con una orientación investigadora y de resolución de problemas.

3. Los niños no recibieron los métodos tradicionales de enseñanza de las operaciones en vertical (algoritmos clásicos), en cambio se les estimulaba a pensar por su cuenta ideas matemáticas.

4. De este modo los niños no aprendieron una forma normalizada y algorítmica de llevar a cabo los procesos matemáticos sino que experimentaron que **en matemáticas uno piensa las cosas por su cuenta.**

***

En resumen tenemos dos posiciones para desarrollar el enfoque problémico: la primera busca hacer del niño un resolutor eficiente de problemas de cualquier tipo o por modelos propuestos, pero la segunda busca profundizar en los conceptos matemáticos a través de una adecuada selección de problemas para cada campo y aplicar estas técnicas de resolución para abordar problemas de la vida real e incluso planteados en otras disciplinas.

En este punto, el enfoque problémico se diferencia de los enfoques históricos que hemos señalado como antecedentes del tema, pues ellos apuntaban a explicar los mecanismos por los cuales la mente humana resuelve un problema con el propósito de lograr la resolución competente de problemas, sin importar el campo al cual pertenecían y por eso se insistía muchas veces en problemas enigmáticos y especiales.

Pero en este programa, vamos a situarnos en la óptica de la segunda vertiente del enfoque problémico porque nos parece fundamental permitir que el niño profundice en ciertos campos conceptuales de la matemática a través de una cuidadosa selección de problemas que le ayuden a conocer las diversas facetas del concepto matemático. De este modo el concepto adquiere un significado que enriquece su pensamiento porque le otorga sentido a los diversos aspectos e interrogantes que plantea el mundo real.

3.2. Los pasos recomendados para la solución de problemas

A partir de esta decisión, nuestra propuesta va a consistir en el desarrollo de tres temas medulares. En primer lugar queremos discutir, los pasos para la resolución de un problema, detallando al respecto nuestras propias experiencias en el aula. Este tema será desarrollado en este tercer capítulo. En segundo lugar queremos brindar en el capítulo siguiente, una selección de algunas estrategias de resolución de problemas, como modelos que puedan servir de guía en la aplicación de este método, teniendo en cuenta aquellas estrategias que se mostraron más eficientes y productivas en nuestro quehacer diario. En tercer lugar, queremos hacer una selección de los conceptos básicos, que naturalmente implica una priorización de los temas contenidos en el currículo y explicar al lector, paso a paso, la gama de significados de cada uno de los conceptos seleccionados, con el propósito de enriquecer su formulación de problemas. Éste último tema, explica las competencias seleccionadas en el instrumento de prueba, y dado que es bastante extenso, lo desarrollaremos en el quinto capítulo.

Iniciemos nuestro trabajo discutiendo los pasos para la resolución de un problema. Como hemos analizado en el capítulo anterior, matemáticos como Georg Polya, influidos por los estudios de la Teoría de la Gestalt, estudiaron detalladamente los pasos para la resolución de un problema. Después de analizar su propuesta, hemos considerado los siguientes, como los pasos metodológicos más apropiados para desarrollar nuestra propuesta con alumnos de 5º y 6º grado.

3.2.1. La comprensión del problema, que comprende tanto la lectura de la información que puede presentarse en texto o en otros formatos, como también la determinación de los datos y la incógnita.
3.2.2. La representación mental o gráfica del problema, que es el momento en que buscamos establecer relaciones entre los datos y la incógnita a través de la analogía con un problema anterior o de la estrategia creativa.
3.2.3. La ejecución de las operaciones seleccionadas a través del cálculo.
3.2.4. La determinación de la respuesta y el análisis y comprobación de la solución.

3.2.1. La comprensión del problema.

El primer paso para resolver un problema es "querer comprenderlo" pues por lo general no logramos entender nada que no nos hayamos propuesto. Esta "disposición de ánimo" de los estudiantes no es espontánea sino que es una actitud generada por el mismo profesor o en todo caso por un adulto mediador.

Para comprender este fenómeno es necesario partir de la matemática como un producto social que se genera con la intervención de un mediador que en buena parte de los casos es el mismo profesor. Para ser un mediador eficiente, el maestro debe en primer lugar sentir gusto por la resolución de problemas y esto sucede cuando asume el problema como un reto que su mente enfrenta con placer intelectual. En segundo lugar cuando se esmera en la selección y la escritura de problemas pertinentes para su grupo particular de estudiantes. Recordemos que un problema es pertinente cuando es significativo por su contenido y al mismo tiempo adecuado por su formato de presentación. En tercer lugar cuando mantiene una actitud paciente que genera confianza en el alumno y le permite abrir nuevos caminos sin imponer soluciones autoritariamente.

3.2.1.1. La variable “términos del lenguaje usual”.

La inclusión de ciertos términos del lenguaje usual no conocidos por los niños puede afectar la comprensión global del texto y por lo tanto, la resolución del problema. En este sentido los términos del lenguaje usual son la primera variable que vamos a identificar pues la falta de comprensión de los términos del lenguaje usual son el primer escollo que encuentra el estudiante.

Una excelente forma de prevenir esta dificultad, es la lectura en clase en voz alta, después de la cual pedimos a los niños que cierren los libros y solicitamos a uno de ellos que exprese la información comprendida en sus propias palabras, esto es lo que se denomina “la reconstrucción oral del texto”. Al escuchar el problema en boca de uno de sus compañeros, tal vez con palabras más sencillas, los alumnos que no habían captado el sentido global del texto, terminan por comprenderlo.

Después de esta síntesis surge la necesidad de analizar algunos términos del vocabulario utilizado. En ocasiones, se trata de términos del lenguaje usual, a veces de sustantivos tales como “cuota”, “ganancia” o “costo” o de verbos como “recaudar” “facturar” o “incrementar”. En otros casos, se trata de términos matemáticos pero de uso común como “el cociente” o “el triple” o de términos no tan comunes vinculados a la física como “kilómetro por hora” o “metros por segundo”.

Si el enunciado presenta situaciones poco conocidas por algunos alumnos, como por ejemplo, las de compra, venta y ganancia, a veces es bastante sugestivo dramatizarlas para mejor entender su sentido. Al respecto, recuerdo el caso de un grupo de alumnas, cuyos padres les impedían salir a comprar por razones de seguridad. Ellas lograron comprender estas situaciones sólo gracias a la instalación de “la tienda escolar”, donde tenían lugar todas esas interacciones grupales que al fin les permitieron comprender esos conceptos.

Otras veces no es necesaria la dramatización y bastará con sugerir ejemplos. En el caso del concepto de ganancia, que a menudo confunden con el dinero recaudado, es necesaria una aclaración del concepto a través de problemas, como el siguiente.

Problema 1

Compré 3 lámparas por S/. 120 en total y luego las vendí a S/. 50 cada una.

a) ¿En cuánto compré cada lámpara? ____
b) ¿En cuánto vendí las 3 lámparas? ____
c) ¿Cuánto gané en la venta de cada lámpara? _________________________________
d) ¿Cuánto gané en la venta de las 3 lámparas? ________________________________

El 50% de un grupo de 60 niños de 10 años confundieron estos términos. Para aclararles la diferencia bastaría recordarles las festividades pro-fondos que se realizan en la escuela, para que de este modo, tomen conciencia que el dinero recaudado no es igual a la ganancia obtenida sino que es necesario descontar el capital invertido en la actividad.

Lo mismo sucede con el término “km por hora” que expresa “la velocidad de un móvil” y que muchas veces no es comprendido por el niño. Algunos profesores prefieren no usar estas unidades en problemas escolares de primaria porque implican conceptos físicos pero en este caso se trata también de un concepto de la vida diaria.

Problema 2

Un avión recorrió 7200 km a una velocidad de 800 km por hora. ¿Cuántas horas tardó en hacer su recorrido?

En ese caso, tal vez sólo hay que preguntarles por “la velocidad del carro de papá” para que alguno intervenga explicando que su papá maneja a 35 km por hora, que es la velocidad normal de un carro en la ciudad y otro aclare, que cuando su padre va en carretera conduce a 100 km por hora, con lo cual para todos los niños será comprensible el nuevo concepto de velocidad de 800 km por hora. Lo importante es que sean los niños quienes contribuyan a la aclaración del significado del nuevo término porque así lo asimilarán mejor, aunque en ocasiones sea el maestro quien proporcione algunos datos y pistas.

En conclusión los términos del lenguaje usual, tales como ganancia, dinero obtenido, velocidad, pérdida, etc… son elementos que pueden dificultar el problema cuando no son conocidos por los niños. Por lo tanto, es siempre recomendable una lectura grupal antes de pedir a los niños que resuelvan el problema. Con esta lectura nos aseguramos que las palabras del lenguaje usual no sean el obstáculo que les impida llegar a traducir el problema al lenguaje matemático.

3.2.1.2. La variable “formato de presentación del problema”

Como hemos visto existen algunos factores que dificultan o facilitan la comprensión del problema. Vamos a tratar a estos factores como variables porque su presencia determina una influencia sobre la comprensión. Entre estas variables, además de los términos del lenguaje usual, tenemos el formato de presentación.

Un recurso para facilitar la comprensión del enunciado es presentar la situación problemática sin formular la pregunta, permitiendo que sea el mismo estudiante que captando el sentido del texto, determine la pregunta y complete el problema. Es importante anotar que mientras no se formule la pregunta el problema está abierto y se trata solamente de una situación problémica. Sólo podemos considerarlo cerrado y completo, cuando los niños han formulado algunas preguntas y aceptamos una determinada. En ocasiones hay varias preguntas posibles y por eso es necesario decidir la pregunta que aceptamos para cerrar el problema.

Formular la pregunta puede ser también una técnica para ayudar al niño a comprender el concepto. Por ejemplo, si queremos que el niño capte la relación de división como **agrupación** podemos pedirle que nos escriba la pregunta correspondiente en esta situación problémica:

Problema 3

Tengo 90 botones para colocarlos en unos abrigos y cada abrigo lleva 6 botones.
Pregunta: ________________________________

En este problema a muchos estudiantes de pedagogía les sorprende que 90 botones entre 6 botones nos dé como resultado 15 abrigos que es un resultado aparentemente ilógico, pero en realidad lo que tenemos son 15 **grupos** de botones, cada uno de los cuales asignamos a un abrigo.

Si en cambio queremos que los niños capten la relación de división como **reparto** debemos pedirles que formulen una pregunta para esta situación:

Problema 4

Tengo 90 chocolates para repartirlos entre 15 niños por igual
Pregunta: ____________________________________

Para los estudiantes de pedagogía la respuesta en este caso es más fácil de explicar a los escolares pues si reparto chocolates entre niños es obvio que obtendré chocolates.

Otro recurso para mejorar la comprensión de problemas consiste en presentar la situación problémica a través de una lámina que el alumno debe interpretar narrando y describiendo la situación con sus propias palabras. Aquí el formato de presentación exige la formulación del texto y la pregunta.

Problema 5

Problema 6

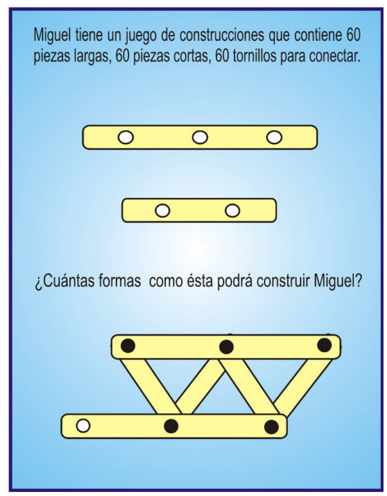
Problema 7

En estos problemas la interpretación de la ilustración puede llevar al planteo de un problema de estructura aditiva, que puede ser tanto de adición como de sustracción. Por ejemplo, en el problema 6, un niño puede decir: “El mono está comiendo tres plátanos y guarda 4 en la rama del árbol. ¿Cuántos plátanos tiene el mono?” que corresponde al problema de suma mientras que otro niño puede decir: “El mono tiene 7 plátanos. Si come 3, ¿cuántos le quedan?” que sería el problema de resto o residuo. Pero incluso otro niño podría abordar el problema del complemento: “Un mono tiene 7 plátanos para su almuerzo. Si comió 3, ¿cuántos le faltan para terminar?” o tal vez a un niño mayor se le ocurra el problema de la diferencia: “Un mono ha comido 3 plátanos y ha guardado 4. ¿Cuántos plátanos más ha guardado que comido?”

Lo importante es que el formato de presentación que exige la lectura de imágenes proporciona variedad de interpretaciones a cada situación problemática y cuando ha sido elaborado con criterio, da al profesor la oportunidad de trabajar una variedad de conceptos matemáticos. Pero en nuestra opinión la lectura de imágenes no sólo mejora la comprensión de situaciones-problema sino que incluso permite el desarrollo de la expresión oral, que el profesor debería cultivar con esmero durante toda la formación escolar. En efecto, al invitar a diversos alumnos a leer la ilustración, tendremos no sólo variedad de matices y perspectivas sino que además podremos recalcar la corrección gramatical, proponer el incremento de nuevos patrones lingüísticos así como también el uso de sinónimos y antónimos, y de esta manera contribuir al enriquecimiento del vocabulario infantil.
El formato también puede incluir imágenes y texto como en la ilustración parcial, donde una parte de la información está en las imágenes y la otra en el texto que las acompaña.

Problema 8

Problema 9



El problema 8 pertenece a la Evaluación Nacional del rendimiento estudiantil 2004 y de acuerdo a los resultados se estima que sólo un 15% de nuestra población escolar de 6º grado está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta que combina imágenes con textos. La dificultad radica no sólo en la lectura del cuadro de doble entrada que relaciona los días de la semana y las horas de lluvia sino en la simbolización icónica de dos horas por medio de una nube con gotas de lluvia. Tal vez hubiese sido necesario indicar al niño expresamente “completa el cuadro con nubes”. Sólo el 15% pudo simbolizar adecuadamente las 6 horas que llovió el sábado con 3 nubes y las 2 horas que llovió el domingo con una nube, pues muchos de los que entendieron el sentido del problema, a menudo dibujaron arbitrariamente una nube por cada hora o colocaron directamente el número de horas en cifras numéricas.

El problema 9 pertenece a la 2º edición del National Assessment of Educational Progress (NAEP) en Estados Unidos. Sólo el 3% de los alumnos de 9 años acertaron afirmando que Miguel podría construir 12 formas y apenas un 24% de los alumnos de

13 años hizo lo mismo, lo que se explica porque la variable presentación de los datos introduce una dificultad, para la cual los estudiantes no habían sido entrenados. Tal vez hubiese sido conveniente mostrar completos las piezas cortas, las piezas largas, los tornillos y aparte, la forma propuesta para construir con sus respectivos dibujos.

En general, la variable presentación de los datos, influye de modo decisivo y hace que problemas poco complejos, incluso para la edad a la que fueron propuestos, se transformen en problemas difíciles de abordar, especialmente cuando la presentación tiene un carácter no estereotipado y requiere abordaje reflexivo y no automático. No queda más remedio que acostumbrar a los alumnos a enfrentar la novedad, proporcionándoles variedad de formatos y evitando la rutina.

Una forma particular de ilustración parcial la constituyen las historietas. Esta variante tiene además la ventaja de dramatizar la situación y hacerla más auténtica a través del diálogo entre los personajes. Pero no necesariamente esta forma resulta más sencilla pues para el niño acostumbrado al texto breve, esta forma le resulta inusual y lo puede enfrentar a sus verdaderas dificultades, que de otro modo habrían pasado desapercibidas. La mayor parte de los profesores da las ilustraciones y los diálogos pero algunos profesores incluso les sugieren la situación a través del dibujo y esperan que sea el niño quien escriba los diálogos. Veamos el caso más simple.

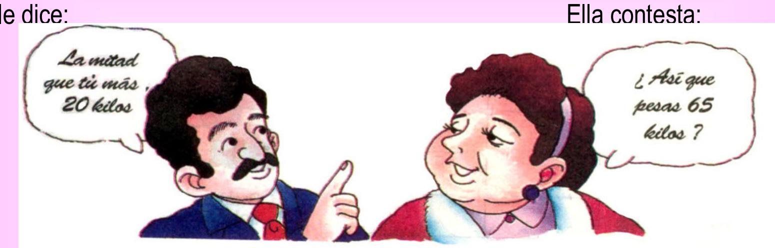
Problema 10

Pepe le dice a Martha:

Problema 11

Mamá le pregunta a papá: ¿Cuánto pesas?

El le dice: Ella contesta:



¿Cuánto pesará entonces mamá?

En ambos casos para resolver el problema con facilidad el niño de 5º o 6º grado debe estar familiarizado con la traducción de ecuaciones y con su resolución, al menos por cálculo mental. En el primer caso los alumnos de una escuela resolvieron por tanteo y cálculo mental completando la ecuación $2 \cdot \_\_ + 6 = 106$, mientras que los alumnos de otra escuela resolvieron la ecuación algebraica: $2n + 6 = 106$. Lo mismo en la segunda, unos resolvieron con la ecuación $\_\_ : 2 + 20 = 65$ por cálculo mental mientras que otros resolvieron $x : 2 + 20 = 65$. Pero el verdadero problema lo tuvieron quienes nunca habían trabajado con ecuaciones pues realmente se enfrentaron no sólo a un formato inusual de presentación sino a un problema de traducción de palabras del lenguaje usual bastante complejo. En este caso el manejo del lenguaje formal de las ecuaciones realmente simplifica el problema de traducción del enunciado. De otro lado parece más bien que el formato de presentación no afecta mucho a los niños de 10 y 11 años de las escuelas privadas con buen uso del lenguaje.

Otra cosa ocurre con niños más pequeños, especialmente en escuelas estatales. En experiencias con niños de escuelas estatales de 7 años, la forma de historieta con diálogo era menos entendida que los textos simples y breves de dos renglones. Ello se debe no sólo a que los niños pequeños no están acostumbrados a la lectura de imágenes sino a que con mucha frecuencia ellos responden mecánicamente o casi manipulando datos de los problemas de texto y aciertan por azar, sin entender realmente lo que leen. Esta situación se hace evidente con el formato de la historieta. . Veamos un caso que corresponde a la Evaluación Nacional 2004:

Problema 12

¿Cuántos huevos usó para preparar la torta?

Esta pregunta evalúa la capacidad de resolver problemas de una estructura aditiva (que incluye adición y sustracción) en el formato de historieta. Desde el punto de vista de la UMC, este es un problema de Cambio 4.[6] Por increíble que parezca sólo fue solucionado por el 15% de los estudiantes en forma de historia ilustrada, con una dificultad Rasch de 358. Cuando se presentó el problema en forma de texto simple y no de historia ilustrada, la dificultad mejoró pero sólo llegó a 348. Algo más que el formato nos explica la dificultad.

Desde un punto de vista semántico, se trata de una sustracción en el caso de resto o residuo porque se trata de lo que me queda después de quitar o restar elementos. Pero en este caso, en lugar de preguntar por los elementos que me quedan, se da la cantidad inicial y el resto, y se pregunta por los elementos sustraídos, es decir por el sustraendo. Así tenemos que para resolver bastaría completar: 15 - __ = 8, pero al parecer, a los niños sólo se les pregunta: "Mamá tenía 15 huevos. Usó 7, ¿cuántos le quedaron?" Pero todavía si les damos esta estructura: 15 – 7 = __ algunos siguen fallando. ¿Por qué? Como veremos más adelante hay un vacío en la enseñanza de los cálculos del 11 al 20 en el primer y segundo grado.
Lejos de desistir, hay que insistir en este formato de presentación si queremos que el nivel de comprensión de lectura infantil realmente mejore. De este modo estaremos planteando un trabajo interdisciplinario con el curso de comunicación integral.

[6] Ver clasificación de problemas en Evaluación Nacional del Rendimiento estudiantil 2004. Op cit. Pp 226

3.2.1.3. La variable "presentación de los datos"

Una vez que los alumnos han superado el asunto de la comprensión de los términos del lenguaje usual del problema y la cuestión del formato de presentación, si hubiese alguna novedad, podemos afirmar que ellos comprenden globalmente el texto, y están en condiciones óptimas para determinar los datos y la incógnita.

Una estrategia simple para ubicarlos consiste en el **subrayado.** Por ejemplo podemos subrayar con azul los datos y con rojo la incógnita. Si el problema es más complejo, una estrategia adecuada es hacer una lista de los datos y otra de las incógnitas. Hablamos de "incógnitas" porque puede surgir más de una, puesto que en ciertas ocasiones hay incógnitas intermedias antes de llegar a la incógnita final.

Observando atentamente la lista de datos y la incógnita estamos en condiciones de determinar el nivel de dificultad del problema porque cualquier impasse que se presente en la determinación y manejo de la variable "datos" nos hará más difícil recorrer el camino hacia la incógnita. Veamos algunos factores que se presentan en la variable datos, factores que contribuyen a facilitar o dificultar la resolución de problemas.

a. El problema con datos incompletos.

En primer lugar debemos determinar si los datos son suficientes para llegar a la incógnita o si por el contrario estamos ante lo que se llama **"problema con datos incompletos".** Analicemos un problema de este tipo, planteado a niños de 6º grado:

Problema 13

En la ciudad A hay 4 hospitales y en la ciudad B hay sólo 3. Sabiendo que la calidad de atención es similar en ambos hospitales, ¿cuál es la ciudad que está mejor atendida?"

Para resolver este problema indudablemente el dato faltante que tenemos que investigar antes de dar una respuesta es el número de habitantes de cada ciudad. Para no confundir al niño conviene advertirle que falta un dato y que debe especificarlo. En este caso el problema consistiría en identificar el dato faltante.

Ocurre también que los datos del problema pueden ser totalmente irrelevantes para su solución. Analicemos un caso extremo de problema con datos faltantes, el célebre problema de Flaubert a su hermana Carolina sobre "los años del capitán":

"Puesto que estudias geometría y trigonometría voy a proponerte un problema. Un barco navega en el océano. Salió de Boston con un cargamento de lana. Desplaza 200 toneladas. Se dirige hacia Le Havre. El palo mayor se quebró; el camarero de la cabina está en el puente; a bordo hay 12 pasajeros. El viento sopla en la dirección N.E. El reloj marca las 3:15. Es el mes de mayo. ¿Qué edad tiene el capitán?"

Con múltiples variantes y mayor brevedad este problema ha sido planteado por muchos investigadores. Analicemos una versión realizada en un colegio de Lima.

Problema 14

En un barco subieron 15 pasajeros en el primer puerto, 20 pasajeros en el segundo y 16 en el tercero. ¿Cuántos años tiene el capitán?[7]

Por increíble que parezca más de la mitad de los niños sumaron los tres números y afirmaron que el capitán tenía 51 años, lo que pone en evidencia que muchos niños mecanizan sus respuestas. Por el contrario, algunos niños se desconcertaron y no lograron dar ninguna respuesta y sólo unos pocos atinaron a responder que el problema no podía resolverse por falta de datos relativos a la edad del capitán.

b. El problema con datos supernumerarios

En segundo lugar debemos determinar si existen datos sobrantes que debemos excluir del planteo. Esto es lo que se llama **"problemas con datos supernumerarios"** y su inclusión realmente pone a prueba hasta que punto un alumno ha comprendido el texto.

Problema 15

Si un automóvil ha recorrido 432 km. empleando 12 galones de gasolina de 84 octanos, ¿cuántos kilómetros ha recorrido por cada galón consumido?

En este caso, muchos niños respondieron el problema tratando infructuosamente de utilizar todos los datos y especialmente tentadora resultó la división 84**:**12, lo que demuestra que muchos niños aciertan manipulando los datos al azar. En realidad lo que faltó fue análisis del vocabulario de parte del profesor. Al parecer el término "84 octanos" no fue aclarado y por supuesto los niños no pudieron llegar a la comprensión cabal del texto e intentaron solamente manipular las cifras.

En otros casos el dato supernumerario tiene que ver con la discriminación de las clases que intervienen en el problema como en el siguiente caso.

Problema 16

En un corral hay 4 gallinas, 1 gallo, 10 pollitos y 3 conejos. ¿Cuántas aves hay en total?

[7] Esta versión del problema, basada en una similar propuesta por el IREM de Grenoble, fue realizada en Lima con resultados parecidos, lo que demuestra la mecanización de la respuesta infantil a nivel general.

Si el niño de segundo grado no posee el concepto de la clase “aves” no podrá resolver este problema, pero lo que ocurre a menudo cuando un niño de 5º grado no lo resuelve es más bien producto de una lectura superficial y desatenta.

Particularmente, esto se nota en el siguiente problema, que hace uso de la clase “muebles” que por supuesto no es desconocida para niños de 5º grado.

> **Problema 17**
>
> En un salón hay 5 mesas, 4 sillas para cada mesa, 3 armarios y 2 mozos.
> ¿Cuántos muebles hay?

Los niños ríen cuando se dan cuenta que algunos compañeros contestaron 30 muebles, incluyendo a los mozos entre los muebles y ello se debe casi exclusivamente a la falta de una lectura atenta y reflexiva.

c. El problema con “conceptos básicos desconocidos”

En tercer lugar debemos determinar si conocemos **“los conceptos básicos para relacionar los datos”** porque como ya señalamos las definiciones de los conceptos son premisas tácitas que intervienen también en la resolución del problema. Si por ejemplo, nos plantean el siguiente problema:

> **Problema 18**
>
> ¿Cuánto debo pagar para empedrar un patio circular que tiene 8 m de radio si por cada metro cuadrado de empedrado me cobran $ 25?

La solución pasa por conocer no sólo el concepto de círculo y sus elementos sino también por conocer el procedimiento para determinar el área del círculo que incluye el manejo del número π para determinar un área circular. Si desconocemos estos conceptos básicos como el radio y los procedimientos para obtener el área circular, será imposible resolver este problema.

Aquí se plantea un problema pedagógico muy interesante. ¿Debemos enseñar a los alumnos a manipular mecánicamente la fórmula del área del círculo como $\pi \cdot r^2$ donde $\pi = 3{,}14$ en el 5º grado? ¿O debemos esperar hasta el 6º grado cuando ya puede entender el significado de π a partir de algunas experiencias significativas con monedas y cordeles y además entender el sentido de la fórmula para determinar el área del círculo a través de un gráfico de equivalencia de áreas?

Quienes optan por la enseñanza de la fórmula sin explicaciones racionales tienen un sentido conductista del quehacer pedagógico y se basan en que todo niño de primaria debe aprender a resolver los problemas prácticos de la vida a través de refuerzos que lo recompensen aunque se trate de estímulos extrínsecos. Más tarde, opinan, podrá aprender sus fundamentos si acaso le interesa continuar estudios superiores. Pero quienes optamos por una pedagogía cognitiva-constructiva, creemos que sólo si el niño alcanza una comprensión adecuada de los conceptos será capaz de retenerlos, aplicarlos y transferirlos a otro tipo más amplio de problemas, y lo que es más importante, será capaz de mantener el interés intrínseco por el estudio de la matemática y no sólo el interés pasajero por motivaciones extrínsecas como son las notas y los premios. De modo, que en nuestra opinión, vale la pena invertir tiempo y trabajo en actividades para profundizar en el significado de los conceptos matemáticos.

Tan importante es el conocimiento de las premisas tácitas, tanto relativas al concepto como a los procedimientos, que muchas veces hacen que una persona que los domina sea tomada por muy inteligente en lugar de simplemente instruida. En una ocasión Rocío, una estudiante que cursaba 2º de secundaria en el Colegio Sophianum viajó a Estados Unidos en un programa de intercambio estudiantil. Sus compañeras americanas de octavo grado le invitaron un lonche en la cafetería escolar donde en una servilleta[8] se planteaba el problema siguiente:

Problema 19

En un corral hay 10 animales entre gallinas y conejos. Si contamos el número de patas de los animales tenemos 32. Puedes decir, ¿cuántos gallinas y conejos hay?

Todas las niñas comenzaron a graficar sus diagramas con las posibles soluciones porque enfrentaban el problema por tanteo y cálculo mental sin los conceptos ni procedimientos implicados en el tema “ecuaciones de primer grado con dos incógnitas”. Pero Rocío, que los conocía, tomó una servilleta y resolvió la ecuación en un minuto, razonando por analogía con un problema similar cuyo modelo dominaba de antemano. Sabiendo que los conejos tienen 4 patas y las gallinas 2, denominando “x” a los conejos e “y” a las gallinas escribió y resolvió por un conocido método algebraico:

$$\begin{array}{lcr}
4x + 2y = 32 & \rightarrow & 4x + 2y = 32 \\
x + y = 10 & \rightarrow & \underline{-4x - 4y = -40} \\
 & & -2y = -8 \\
 & & y = 4
\end{array}$$

Donde “y” las gallinas son 4 y por tanto si “x + 4= 10”, “x”, los conejos son 6.

Por supuesto que para todas sus compañeras americanas la niña peruana resultó ser un genio de extraordinaria y precoz inteligencia, ¿cómo había resuelto en un santiamén lo que las demás niñas de su edad habían tardado diez minutos en resolver? Simplemente ella dominaba el concepto de ecuaciones simultáneas que las otras no conocían.

Pero adelantar los conceptos algebraicos puede producir asimilación memorística en los demás estudiantes y hacer inviable la transferencia a otros problemas. Al menos eso pensaban las autoridades educativas americanas que retrasaban la enseñanza del álgebra hasta la década del 90. En efecto, el programa de matemáticas americano de 8º grado para niños de 13 años, que en USA corresponde al último grado de educación

[8] En las cafeterías estudiantiles americanos se acostumbra a colocar problemas de ingenio en las servilletas.

básica contenía mucha aritmética razonada pero solamente "a bit of algebra"[9] Mientras que en el Perú de 1962 y hasta hoy, se estudia menos aritmética razonada y bastante más álgebra, porque los profesores aman la enseñanza a base de métodos formales, al punto que se llega a cubrir el tema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas en el 2º de secundaria, sin haber profundizado en los temas de la aritmética.

¿Es necesariamente una mejor formación matemática la que no profundiza en los conceptos aritméticos básicos y mecaniza las soluciones a través del álgebra? En el caso de Rocío la asimilación del concepto algebraico funcionó porque era una buena alumna, que sin ser el genio matemático que sus compañeras creyeron, poseía una inteligencia normal-superior pero al mismo tiempo, un especial interés por continuar estudios superiores. Sin embargo, en nuestra opinión, esto no suele darse en la mayoría de los casos, en los cuales el alumno memoriza el procedimiento algebraico sin pasar por el razonamiento aritmético.

d. El problema con "condiciones especiales"

Por último, al analizar los datos y la incógnita, no debemos pasar por alto las **condiciones especiales del problema** que a veces restringen la utilización de ciertos datos. Es el caso del problema siguiente.

Problema 20

Una heladería vende conos de helados de tres bolas. Ofrece solamente tres sabores: fresa, vainilla y lúcuma. Los clientes pueden solicitar bolas del mismo sabor o de diversos sabores. ¿Cuántas combinaciones diferentes pueden comprar?

Para encontrar las 10 combinaciones posibles debemos poner atención a la condición del problema. Se trata de formar combinaciones con los tres sabores diferentes; o que repitan los tres sabores, por ejemplo, fresa-fresa-fresa; o que se repitan dos de los tres sabores. En este caso, dicha condición hace posible la combinación fresa-fresa-lúcuma pero si consideramos ésta, no podemos admitir como diferente las combinaciones fresa-lúcuma-fresa o lúcuma-fresa-fresa, puesto que las tres combinaciones corresponden al mismo tipo de helado. La condición del problema restringe de este modo el uso de algunas combinaciones lógicamente posibles y debemos prestar atención a esta restricción. De hecho, aunque la solución es similar, la condición del problema puede variar ligeramente si se introducen cuatro sabores con tres bolas de helado o cuatro sabores con dos bolas en cada cono.

Hasta hace unos pocos años, estos problemas no formaban parte de los textos escolares pues se pensaba que la lógica combinatoria no podía ser abordada por niños de primaria. Sin embargo, hoy tenemos problemas similares tanto en los libros de texto como en el currículum.

[9] Es decir "una pizca de álgebra". Pero vale la pena aclarar que estamos hablando de la concepción clásica en USA pues actualmente se difunden textos de capacitación para maestros primarios con una nueva visión, como por ejemplo "Thinking mathematically" Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary School, de Thomas P. Carpenter, Heinamann, Portsmouth NH, 2003

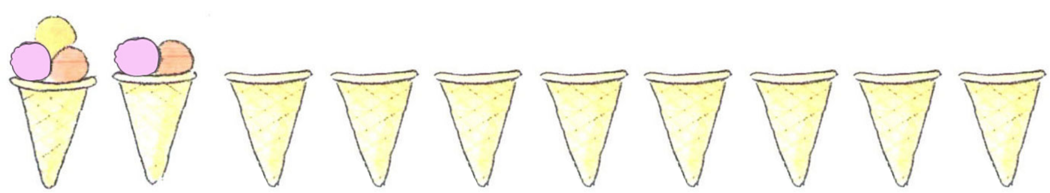
3.2.2. <u>La representación mental o gráfica del problema para elaborar la traducción</u>

Una vez que hemos sorteado con éxito la identificación de los datos y la incógnita tenemos la posibilidad de representarnos el problema mentalmente para hallar el plan de solución y traducir el problema. En primer lugar buscamos en nuestra base de datos algún problema similar que hayamos resuelto. Si esto ocurre, bastará aplicar el razonamiento analógico para resolverlo con la misma técnica o con una pequeña modificación de la técnica asimilada. Pero si nos enfrentamos por primera vez a un nuevo tipo de problema la representación gráfica con sus diversas herramientas estratégicas pueden ayudarnos.

En suma se trata de dos alternativas de trabajo que vamos a analizar.

3.2.2.1. Las dos alternativas de trabajo

Volvamos el problema 19, de los conos de helados que se pueden formar con 3 sabores. En este caso podemos sugerir a los estudiantes un diagrama de probabilidades donde F significa fresa, L, lúcuma y V, vainilla. Para el caso de niños de 5º grado podemos pedirles que dibujen y pinten los 10 conos de helados con tres colores y se den cuenta por la experiencia, cual es el camino de solución más adecuado.



Pero, para que los maestros dominen una estrategia formal trazamos el siguiente esquema:

Los tres sabores puros:

FFF	LLL	VVV

Dos de los sabores iguales:

FFL	LLF	VVF
FFV	LLV	VVL

Todos los sabores diferentes:
FLV

Si sabemos manejar este tipo de problemas estamos en condiciones de resolver por analogía el problema siguiente:

Problema 21

El heladero añadió el sabor de chocolate y ahora tenemos 4 sabores: fresa (F), lúcuma (L), vainilla (V) y chocolate (C) en la oferta. Cada cono sigue llevando sólo 3 bolas de helados. Anota los 20 tipos de helados que puedes pedir

Como vemos cambia la condición sobre el número de sabores que se pueden combinar pero permanece la condición sobre el número de 3 bolas de helados en cada cono.

Como ya conocemos el camino estratégico, razonamos por analogía anotando primero las combinaciones de los cuatro sabores puros, luego pasamos a las probabilidades con dos sabores iguales y al final terminamos con los casos de los tres sabores diferentes. De este modo tenemos las 20 combinaciones solicitadas:

Con el mismo sabor:

FFF	LLL	VVV	CCC

Con dos sabores iguales:

FFL	LLV	VVC	CCF
FFV	LLC	VVF	CCV
FFC	LLF	VVL	CCL

Con los tres sabores diferentes:

FLV	LVC	VFC	CFL

Con la aplicación de este procedimiento reproducimos una técnica ya asimilada, pero su desarrollo, aunque supone solamente razonamiento analógico, no es una pérdida de tiempo porque implica el manejo de una nueva condición pues se trata de cuatro sabores y ello amplía las posibilidades del procedimiento.

Con este ejemplo, creo haber puesto de manifiesto la diferencia que existe entre enfrentarnos al problema nuevo y por otro lado, abordar el problema cuya estructura matemática es similar a uno conocido, que identificamos y tratamos de evocar en nuestra memoria que funciona, en este caso, como una base de datos.

En el primer caso se trata de un auténtico razonamiento inferencial y productivo porque lo enfrentamos con nuevas estrategias creativas pero en el segundo caso, se trata más bien de un problema anteriormente conocido que podemos abordar por razonamiento analógico y en este caso lo enfrentamos reproduciendo o modificando ligeramente una técnica ya asimilada.

3.2.2.2. Estimulando la representación de los datos

Ahora bien, ¿cómo lograr que el alumno se de cuenta que puede usar de frente un procedimiento conocido o que más bien debe usar su arsenal de estrategias creativas? Un recurso muy usado consiste en pedir a los alumnos que lean silenciosamente el problema durante un par de minutos, transcurridos los cuales, pasan a comentar lo que entendieron con su compañero de banca y luego con otros dos niños vecinos.[10] Enseguida el profesor vuelve a leer el problema pero esta vez en voz alta y le pide a uno o dos alumnos que reconstruyan el texto con sus propias palabras con el texto cerrado.[11] Si notamos dificultades, analizamos en conjunto algunos términos del vocabulario, y si los niños no las manifiestan porque les parece que entendieron a cabalidad el significado global del texto, les pedimos que en lugar de resolver el problema, representen simplemente con un gráfico, los datos y la incógnita.

[10] Esta técnica difundida por Heinz Klippert en sus conferencias en el Humboldt, se ha revelado muy útil.

[11] Esta técnica de "reconstrucción oral y gráfica del texto" que puede combinarse con la de Klippert nos fue sugerida por el profesor alemán Norbert Wapnitz

Al principio los niños se resisten e insisten en dar una respuesta apresurada tratando de operar con los datos en lugar de representarlos. ¿Por qué razón? Sencillamente la representación simbólica de la situación problema implica establecer una relación lógica entre datos e incógnita que es más difícil de lograr que una manipulación operativa con los datos. Para ayudar a los que tienen dificultades en establecer esta relación, formamos grupos liderados por los niños que leyeron e interpretaron correctamente este problema y le pedimos a cada grupo que seleccione la representación que estime más adecuada y nos la presente, tal vez con alguna modificación sugerida por el grupo.

Ahora nos toca a nosotros como maestros escoger los mejores gráficos entre los presentados, atendiendo a la representación de la relación entre datos e incógnita. Le pedimos a uno de los grupos escogidos que presente su representación en la pizarra y la interprete. Los demás niños pueden copiar, si lo desean, este gráfico. Allí terminó la intervención del maestro apoyando el trabajo grupal, pues a partir de este momento la resolución del problema corre por cuenta individual del alumno. El profesor Norbert Wapnitz solía decir "El resto es tarea personal para la casa y ahora nos dedicamos a leer y analizar juntos, el próximo problema"

En nuestra opinión, cuando el alumno ha establecido una adecuada relación lógica entre los datos y la incógnita el problema ya está casi resuelto y lo demás es simple trabajo de ejecución operativa, en el cual efectivamente no vale la pena perder tiempo en la clase y es mejor dejarlo como trabajo personal para la casa. Aprendiendo a representar gráficamente un problema los niños aprenden con el tiempo y la experiencia a representarlo mentalmente y están en mejores condiciones para decidir que procedimiento utilizar.

3.2.2.3. La utilización de estrategias creativas

Al representar los datos e incógnita de un problema, llega el momento en que necesitamos usar las más variadas estrategias creativas de representación gráfica y simbólica. Estas estrategias pueden aplicarse indistintamente en cada uno de los campos conceptuales que vamos a seleccionar, aunque algunas de ellas se muestren más apropiadas para un campo determinado de problemas. Entre éstas tenemos:

1. El uso de la recta numérica
2. La representación de la suma y diferencia de dos números
3. El cuadro de doble entrada
4. Los diagramas para representar el complemento, la diferencia y la igualación.
5. Los diagramas lógico-matemáticos de Venn-Euler, Carroll, de árbol y de flujo.
6. Los cuadros para problemas de numeración con bases no decimales
7. Los diagramas para procesar la información estadística: el diagrama de barras, las tablas de frecuencia, los diagramas de doble barra y los de líneas y puntos.
8. Los esquemas para trabajar los problemas de MCD y MCM
9. Los esquemas para trabajar con los operadores fraccionarios
10. Las tablas para trabajar la proporcionalidad directa e inversa
11. El diagrama cartesiano para representar la proporciones directa e inversa.
12. La representación gráfica del porcentaje
13. Los gráficos circulares para representar el porcentaje
14. Cuadros para las conversiones con medidas de longitud, tiempo y capacidad

3.2.3. La ejecución de las operaciones seleccionadas

Concebir el plan ayudados por la estrategia, sobre todo cuando enfrentamos un problema nuevo puede ser el momento de mayor elaboración intelectual porque supone elaborar la traducción del problema al lenguaje simbólico y matemático. Por ese motivo vamos a dedicar el 4º capítulo de la tesis y muchas secciones del fólder del estudiante a un análisis detallado de estas estrategias Pero pasado este momento de análisis, que culmina en la traducción del problema al lenguaje matemático, la ejecución de las operaciones planteadas es un momento relativamente simple, pero que no por eso debemos descuidar.

En primer lugar cuando llega el momento de ejecutar las operaciones tenemos que decidirnos por las breves operaciones de cálculo mental escritas en forma horizontal o por las operaciones mediante técnica operativa que implican el uso del algoritmo y que generalmente se escriben en forma vertical. Hay una tercera posibilidad que no recomendamos hasta por lo menos el sexto grado, que es la ejecución de operaciones largas a través de la calculadora.

3.2.3.1. ¿Algoritmo o cálculo mental?

La elección dependerá de las cifras y de las propiedades y técnicas de cálculo que el alumno maneje. Por ejemplo, si tenemos el problema siguiente, podemos pensar en el uso directo del algoritmo de multiplicación o en la aplicación de las propiedades conmutativa y asociativa, para luego aplicar el cálculo mental.

Problema 22

En la sala de bebes del hospital hay 38 cajas cada una de las cuales contiene 25 bolsas de pañales. ¿Cuántos pañales tiene la sala si en cada bolsa hay 4 pañales?

Al plantear el cálculo Roberto uso el algoritmo y anotó:

	Operaciones auxiliares
(25 x 38) x 4 =	25
950 x 4 = 3 800	x 38
	200
	75
	950

Naturalmente tuvo que utilizar un cálculo auxiliar para resolver 25 x 38 por técnica operativa, aunque pudo efectuar 950 x 4 en forma horizontal. Pero Juan que conocía la aplicación de propiedades, resolvió con facilidad aplicando solamente operaciones de cálculo mental y escribiendo:

(25 x 38) x 4 =
(25 x 4) x 38 =
100 x 38 = 3 800

R: La sala cuenta con 3 800 pañales.

Si los alumnos conocen la escritura y la traducción de los cálculos por medio de operaciones combinadas, seguramente se animarán a utilizarlas en la ejecución de los cálculos como en el caso siguiente.

Problema 23

La boticaria debe empacar 360 tabletas para la tos en cajas de 6 y 240 en cajas de 12. ¿Cuántas cajas necesitará?

Marcela, que conoce las reglas de las operaciones combinadas y tiene práctica en la traducción de problemas a operaciones combinadas, resolvió así:

360 : 6 + 240 : 12 =
60 + 20 = 80

R: La boticaria necesitará 80 cajas.

Esta técnica se puede aplicar en forma más amplia cuando el alumno conoce el uso operativo de la propiedad distributiva como en este problema:

Problema 24

Con $ 330, Ana compró 6 vestidos. Si los vendió ganando $ 15 por vestido, ¿en cuánto vendió cada vestido?

330 : 6 + 15 =
(300 : 6 + 30: 6) + 15 =
(50 + 5) + 15 =
55 + 15 = 70

Venderá cada vestido en $ 70.

Otros alumnos resuelven esta operación combinada valiéndose de operaciones auxiliares con la propiedad distributiva (PD) o la técnica operativa (T0):

330 : 6 + 15 =
55 + 15 = 70

Operaciones auxiliares con PD:
330 : 6 = 55
300 : 6 = 50
+ 30 : 6 = 5

O con técnica operativa :
33’0 : 6 = 55
30
3 0
3 0
0

3.2.3.2. Utilizando la estimación previa

En algunos casos es recomendable como paso previo a la ejecución de operaciones, la determinación del resultado por técnicas de estimación mental. Ello nos previene de cometer gruesos errores en la ejecución de operaciones. Si tenemos que calcular el precio con números decimales, a veces conviene usar la aproximación para preveer el resultado.

> **Problema 25**
>
> ¿Cuánto me cuestan 4,25 kg de azúcar a $ 1,85 el kilogramo?

Para multiplicar podemos redondear los datos a la unidad más cercana y obtener:
4 kg x $ 2 = $ 8 aproximadamente

Luego de ejecutada la operación mediante técnica operativa tenemos:
4,25 x 1,85 = $ 7,86, que podemos redondear a $ 7,90

Esta cifra se nos presenta como una cantidad razonable porque no se diferencia mucho de nuestro cálculo previamente estimado. En caso de una diferencia apreciable tendríamos que revisar nuevamente los cálculos sospechando que hemos cometido algún error en las operaciones.

Igualmente es recomendable estimar una cantidad razonable situada entre dos números dados. Supongamos que tenemos el siguiente problema:

> **Problema 26**
>
> En una fábrica se confeccionan abrigos. Sólo falta colocarles los botones. Tenemos exactamente 2060 botones para 345 abrigos. ¿Cuántos botones llevará cada abrigo?

Rosita no lograba entender el problema pero empezó a abordarlo de una manera reflexiva ¿tendré menos o más botones en la respuesta? Sin duda menos, entonces tendré que restar o dividir. ¿Cuántos botones llevan los abrigos normalmente? Por lo menos 3 y tal vez 10 como máximo. Volvió a leer el texto y esta vez se dio cuenta que tenía que saber cuántos grupos de botones se podían formar dividiendo los 2060 botones entre el número de abrigos.

Emma, sin embargo, no realizó ninguna estimación previa sino que más bien se apresuró a multiplicar, revisó la corrección de los cálculos y sin pensar en lo inapropiado de la respuesta, contestó que eran 573 656 botones. No se detuvo a estimar que semejante cantidad de botones no podían colocarse de ninguna manera en un abrigo. Si se hubiera representado mentalmente el problema y hubiera tanteado como Rosita aún sin realizar cálculos operativos hubiera llegado a una respuesta aproximada.

Pero no se crea que estas respuestas son exclusivo privilegio de los pequeños distraídos. Es más bien una actitud de quien se mecaniza con la aplicación de operaciones algorítmicas porque cree en la certera e infalible magia de los cálculos. Un estudiante universitario de agronomía que tenía que resolver un problema relativo a la cantidad de abono que se requería para determinada planta en un terreno de 25 m^2 ejecutó sus cálculos utilizando las complicadas fórmulas estudiadas. Terminados los cálculos y sin utilizar ninguna técnica de estimación contestó mecánicamente que necesitaba el equivalente de 1856 TM de abono. Cuando el profesor le pidió que tratara de imaginar mentalmente el espesor de la capa de abono con una cantidad semejante, quedó sorprendido de su propia respuesta.

En nuestra opinión la enseñanza de la matemática que se da en nuestra escuela con la mecánica insistencia en la ejecución de algoritmos, deforma en la mente del niño y más tarde en la del joven, el rol que cumplen las operaciones en la resolución de problemas. Algunos estudiantes que no saben como leer el texto ni interpretarlo, reciben el problema y sin tratar de representárselo mentalmente se preguntan como si eso fuera lo más importante ¿sumo? ¿resto? ¿multiplico? ¿o divido? Luego miran las cifras y sospechan que debe ser de una determinada operación porque las cifras dadas así lo sugieren o porque la profesora ha enseñado últimamente esa operación.

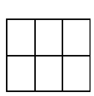
La actitud poco reflexiva de los estudiantes se da con frecuencia cuando ellos se enfrentan a un examen de 10 preguntas que deben resolver en 45 minutos, sin haber asimilado del todo los conceptos evaluados. En el último examen de 6º grado de un colegio particular se propuso el siguiente problema:

Problema 27

El tablero de una mesa de tenis mide 2,7 m de largo y 150 cm de ancho.
a) ¿Cuál es el perímetro de la mesa?
b) ¿Cuál es el área del tablero de la mesa?

Todos los alumnos conocían una mesa de tenis y el significado del centímetro y el metro. Pero por extraño que parezca casi la mitad contestaron que el perímetro era de 305,4 m y el área de 405 m^2 ¿Se trataba de una mesa de tenis o de una cancha de fútbol? Se quedaron muy sorprendidos cuando releyeron los datos y encontraron que 150 cm son solamente 1 m 50 cm y de ningún modo 150 m.

Sin lectura atenta y detallada, no hay problema de matemática por simple que sea, que pueda resolverse. Por eso es fundamental una lectura atenta y reflexiva pero una vez lograda una traducción uniforme de los datos y la incógnita, es recomendable preveer mediante cálculo mental una respuesta aproximada. En este caso, podemos imaginarnos qué área tendría una mesa de tenis de 3 m de largo, (aproximando 2,7 m) y de 2 m de ancho (aproximando 1,50 m). Si un rectángulo de 3 m x 2 m mide 6 m^2, el área no debería exceder esa medida y su perímetro no debería superar los 10 m. Tal operación se puede realizar a la par que el uso de la estrategia del gráfico.



Aprox para el **perímetro**: $2 \cdot 3\text{m} + 2 \cdot 2\text{ m} = 6\text{ m} + 4\text{ m} = 10\text{ m}$
Aprox para el **área:** $3\text{ m} \cdot 2\text{ m} = 6\text{ m}^2$

3.2.4. La respuesta, su comprobación y el análisis de la solución

Por lo general se recomienda dar como respuesta una proposición completa o al menos una frase con sentido mencionando la unidad correspondiente. Sin embargo, para casi todos los niños el problema termina con la respuesta y hasta los más aplicados creen que todo finalizó allí.

No obstante hay que enseñarles como cruzar los datos para que puedan asegurarse que han acertado la respuesta y sobre todo hay que realizar con ellos el análisis de la solución.

3.2.4.1. Aprendiendo del error

> **Problema 28**
>
> Enrique dice: "Entre las dos manos tengo 12 monedas pero en la derecha tengo dos más que en la izquierda. ¿Cuántas monedas tengo en la mano izquierda?"

Pedro realiza las siguientes operaciones:
12 : 2 = 6
6 – 2 = 4

Y luego afirma que Enrique tiene 4 monedas en la mano izquierda. La profesora le pregunta. "¿Y cuántas monedas tendrá en la derecha?"
Pedro contesta que tendrá 8 en la mano derecha puesto que 12 menos 4 es 8.

La profesora invita a la clase a comprobar la respuesta utilizando las dos condiciones del problema:

1. La primera condición dice que las monedas en ambas manos suman 12 y como 8 + 4 = 12, la primera condición se cumple.

2. Pero la segunda condición dice que en la derecha hay dos más que en la izquierda y ésta no se cumple porque 8 – 4 = 4 y no 2.

De modo que la clase se ve obligada a repensar el problema y a seguir buscado una solución que cumpla con las dos condiciones. Es interesante observar que cuando los alumnos caen en una contradicción semejante se motivan para buscar una solución lógica al problema. Más allá de cualquier motivación extrínseca el comprobar la imposibilidad lógica de una determinada respuesta es un punto de partida interesante para buscar una respuesta lógica. Más adelante vamos a realizar el análisis de la solución de este problema usando una estrategia sobre la suma y diferencia, que resultó muy apropiada para que los alumnos de 5º grado encontraran por si mismos la solución.

En otros casos la comprobación es más simple e implica solamente repasar el enunciado y completar con atención los datos en una ecuación. Tal ocurre en este problema:

Problema 29

Una lámpara, una mesa y una alfombra cuestan en total \$ 300. Si la lámpara cuesta \$ 100 y la mesa \$ 45 más que la lámpara, ¿cuánto costó la alfombra?

Marita resolvió así:
300 – 100 – 45 = 155
y contestó que la alfombra costó \$ 155.

La profesora le pidió que tenga en cuenta la condición del problema que no dice que el valor de la mesa sea \$ 45 sino que "la mesa cuesta \$ 45 **más** que la lámpara" y la invitó a simbolizar los datos y a completar la igualdad siguiente teniendo en cuenta esta nueva idea:

Lámpara + mesa + alfombra = 300
100 + (100 + 45) + __ = 300
100 + 145 + **55** = 300

Y completando la igualdad ella misma corrigió su respuesta.

Lo importante es no desaprovechar la oportunidad para aprender del error cometido y para lograrlo es aconsejable sugerir un camino de solución y permitir que sea el mismo niño que llegue a la respuesta. Si esto no es posible porque el niño tiene dificultades de razonamiento es conveniente que pueda lograrlo a través del trabajo grupal. Ante una respuesta incorrecta todos los caminos son válidos, si permiten sugerir estrategias sin adelantar la solución correcta. En ningún caso la respuesta debe provenir del profesor o en general de una persona mayor, aunque en ocasiones debamos sugerir pistas.

3.2.4.2. La comprobación investigando nuevas rutas

El problema no está terminado si no comprobamos la solución pero aún si la primera solución estuviese correcta, vale la pena preguntarnos si existe otro camino de solución.

Una buena experiencia de comprobación la ofrece el siguiente problema porque permite dos soluciones posibles.

Problema 30

En una competencia el auto de Jorge recorrió 125 km por hora mientras que el auto de Rodrigo solamente alcanzó 90 km por hora. Después de 8 horas de competencia, ¿por cuánto ganó el más veloz?

Bertha resolvió multiplicando la velocidad de cada corredor por el número de horas y luego encontrando la diferencia, halló la solución:

125 x 8 – 90 x 8 =
1000 – 720 = 280 km

R: Jorge ganó por 280 km

Mientras Rosa pensó que si en una hora, un corredor le saca al otro 35 km de ventaja, en 8 horas, la ventaja será 8 veces mayor:

(125- 90) x 8 =
35 x 8 = 280 km

Los niños de la clase opinaron que las dos soluciones eran correctas pero la segunda era mejor porque era la más simple. Pero el problema no terminó allí puesto que la profesora comparó las dos soluciones y aprovechó para explicar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la resta:

(125 – 90) x 8 = (125 x 8) – (90 x 8)

De este modo pudo generalizar:
(a – b) x c = (a x c) – (b x c)

Al finalizar esta experiencia una niña exclamó: “Ahora sí, ya no le podemos sacar más punta al problema” Creo justamente que se trata de eso, de sacar el máximo provecho del análisis de la solución.

Finalmente el análisis de la solución puede también abarcar otros aspectos, desde la comprensión global del texto y el análisis del vocabulario, pasando por el tipo de formato utilizado, hasta la dificultad en la determinación de los datos y el análisis de los conceptos matemáticos implicados. Pero sobre todo, debe atender fundamentalmente a la estructura matemática del problema, que se refleja en las operaciones seleccionadas y que es importante rescatar para que nos sirva de modelo para resolver problemas similares por analogía.

Fijar y asimilar la estructura del problema conservando “memoria de las soluciones” y así aumentar nuestra base de datos, es fundamental para garantizar la transferencia de este conocimiento a nuevas situaciones, que es lo que finalmente nos produce la capacidad de incrementar nuestro saber.

Capítulo IV
Herramientas estratégicas en la solución de problemas

4. El uso de herramientas estratégicas en la práctica escolar

Hemos concluido el análisis de los pasos en la resolución de problemas y en este capítulo vamos a presentar algunos casos sobre el uso de herramientas estratégicas, tal como han sido utilizadas en el curso de nuestra práctica escolar.

Como sustentaremos en este trabajo, las llamadas herramientas estratégicas creativas son procedimientos de representación y transformación de los datos y la incógnita de un problema mediante diversas técnicas e inventivas, que hacen evidente la relación lógica entre ellos, permitiendo de ese modo, llegar a la traducción del problema utilizando el lenguaje simbólico de la matemática a partir del lenguaje usual.

Como sostienen Vila y Callejo las herramientas estratégicas no son prescriptivas en el sentido de los algoritmos sino descriptivas. A diferencia del algoritmo la estrategia sólo describe una manera general de proceder. Aplicar una estrategia supone seleccionarla, decidir qué versión utilizar, diseñar una adaptación libre pero adecuada y retomar la relación con el problema original.[1]

Nuestras herramientas estratégicas han sido reelaboradas unas veces a partir de las inquietudes que surgían al analizar errores de los estudiantes, otras veces al tratar de mejorar un gráfico incompleto que ellos mismos diseñaban, a menudo contrastando diversos caminos de solución de problemas en la pizarra y en otras ocasiones, buscando modelos en los libros o modificándolos en la imaginación, a partir del pedido expreso que se les hacía a los alumnos para que graficasen en una hoja, la relación lógica entre los datos y la incógnita.

Vamos a presentar algunas de ellas en este capítulo y el resto, han de presentarse tanto en la siguiente unidad, como en el fólder desarrollado para el trabajo del estudiante, a medida que desarrollemos la presentación de los diversos campos y conceptos básicos seleccionados. Mucho nos hubiese gustado seleccionar la mayoría de los conceptos correspondientes a todos los campos que se trabaja en la primaria. Pero esta es una pretensión imposible de satisfacer y nos hemos visto forzados a elegir. Seleccionar ciertos conceptos correspondientes a los campos básicos, y desarrollarlos en desmedro de otros, requiere un criterio de prioridad que hemos adoptado, teniendo en cuenta su importancia en el desarrollo del currículo de 5º y 6º grado.

Por tanto, veamos el uso en la práctica escolar de algunas de las herramientas más significativas que hemos utilizado. Para este capítulo hemos elegido:

4.1. El uso de la recta numérica.
4.2. La representación de la suma y diferencia.
4.3. El uso del cuadro de doble entrada.

---

[1] "Conocimientos y metaconocimietos" en A.Vila y ML Callejo. Matemáticas para aprender a pensar. Narcea, Madrid, 2004, p. 39

4.4. Los diagramas para el complemento, la diferencia y la igualación.
4.5. Los diagramas de la lógica: Venn-Euler, Carroll, de árbol y de flujo.
4.6. Los diagramas para problemas de transformación de bases.
4.7. Los diagramas para comparar y procesar la información estadística.
4.8. Los diagramas para trabajar problemas de MCM y MCD.
4.9. Los esquemas para trabajar problemas con operadores fraccionarios.
4.10. Las tablas para trabajar la proporcionalidad y el porcentaje.

4.1 <u>El uso de la recta numérica</u>

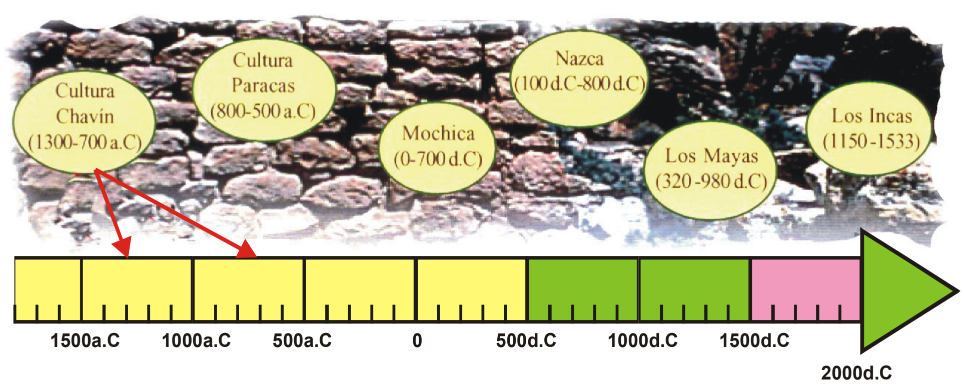
Cuando se trata de representar recorridos de móviles, una alternativa interesante es seleccionar la recta numérica. Los recorridos de bicicletas, autos y trenes pueden ser analizados, unas veces para compararlos y otras para completarlos, por medio de la recta numérica.

4.1.1. La recta numérica para introducir los números enteros.

Sin embargo, en el 5º y 6º grado, la recta numérica sirve también para analizar problemas en la línea del tiempo, sobre todo para ubicar sucesos antes (AC) y después de la era cristiana (DC). Con el tema de la línea de tiempo en el 5º grado el alumno es capaz de comprender, al menos uno de los significados del número entero. Por ejemplo, al estudiar la Cultura Paracas, toma nota que se extinguió 500 años AC, mientras que al investigar la Cultura Nazca, se informa que nació 100 DC. ¿Qué problema podemos plantear con esos datos usando la línea de tiempo?

Problema 31[2]

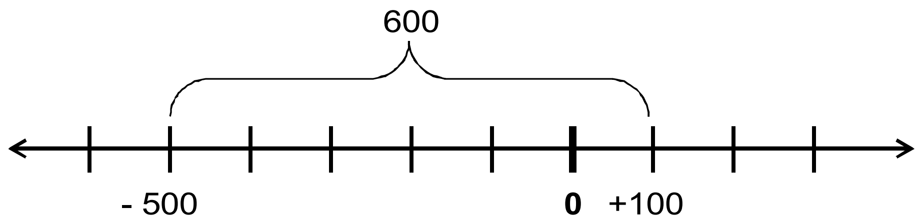
Marca entre dos flechas el período de inicio y extinción de cada cultura pre-inca.
Luego responde, ¿cuántos años después de extinguida la Cultura Paracas surgió la Cultura Nazca?



Tal hecho puede presentarse sin duda en una recta numérica y puede servir de base para interpretar 500 años AC como -500 y 100 años DC como +100. Tal representación además de permitirnos establecer la distancia en el tiempo de

[2] Ferro, Antonieta. Matemática 5. Ed. Eula, Lima, 2007, pp 20

ambas culturas, nos proporciona un significado que nos aproxima al concepto de número entero.



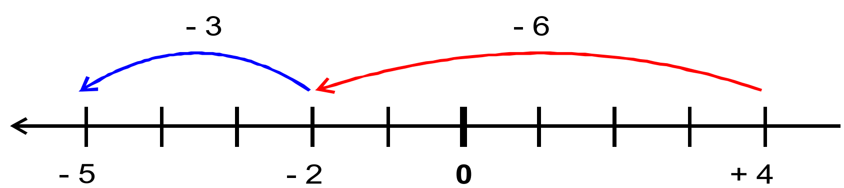
Asimismo, si queremos iniciar a los alumnos de 5º en el campo de los números enteros, la recta numérica se muestra adecuada para representar problemas de temperaturas bajo cero y sobre cero, con lo cual un nuevo significado va delineando el concepto de número entero.

Problema 32

Ayer en Puno la temperatura que era de 4º al mediodía descendió 6 grados al anochecer y 3º más a la medianoche. ¿Qué temperatura tenía Puno a la medianoche?

Un problema de esta naturaleza nos permite establecer las primeras operaciones con números enteros a partir de $4 - 6 - 3 = -5$

Tales operaciones carecerían de soporte intuitivo de tipo geométrico, si no estuviesen acompañadas por un gráfico de la recta numérica.



Esta ya es una viga importante del concepto. Pero el concepto estará mejor construido si trabajamos en la recta numérica problemas con cuentas bancarias de saldo negativo.

Problema 33

EL 31 de diciembre mi papá tenía \$ 240 en su cuenta bancaria. Pero ese día Techo Propio le cobró \$ 200 por nuestra casa y Luz del Sur \$ 50. Cuando le llegó el recibo de su cuenta, él tenía un saldo negativo. ¿Puedes calcularlo?

Ahora podemos usar la recta numérica en forma esquemática, sin necesidad de representar cada decena, porque si los niños de 5º entendieron el problema anterior, el concepto de número entero está bastante más elaborado y será posible calcular mentalmente:

240 – 200 – 50 = - 10

El currículo de nuestro colegio, presenta los números enteros en 5º y debemos reconocer, que los niños los manejan, tal vez, mejor que las fracciones. Eso si, dejamos el doble signo y todas las demás propiedades formales de los enteros para el Iº de secundaria pues aquí, apoyados en la recta numérica sólo pretendemos dar un soporte intuitivo de tipo geométrico al concepto "numero entero" puesto que como decía Kant: "Todo concepto sin intuición es vacío"

4.1.2. Análisis de un problema aritmético utilizando la recta numérica

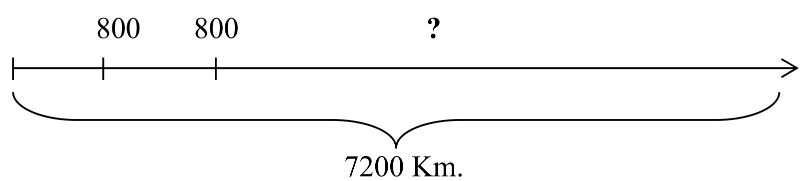
Estudiemos algunas aplicaciones con el clásico tema de los móviles que siempre aparece en los libros de texto y forma parte de nuestro currículo tradicional. Casi siempre los problemas de móviles pertenecen a la fantasía porque las velocidades reales no ocurren sin aceleración pero, a pesar de este inconveniente es interesante abordarlos considerando un movimiento uniforme.

Problema 34

Un avión debe recorrer 7200 km a una velocidad de 800 km por hora. Después de 2 horas de vuelo, ¿cuántos kilómetros le faltan recorrer?

En este problema se pidió a los estudiantes que no efectuaran de inmediato las operaciones sino que representaran los datos del problema organizándolos de tal modo que el gráfico les representara una ayuda para encontrar el camino de solución y plantear la mejor traducción posible.

Después de revisar el trabajo de 5 grupos, seleccionamos como más adecuado el siguiente grafico de los datos representados en una recta numérica:



Uno de los estudiantes del grupo explicó que en la recta graficada estaba representada la distancia total de 7200 km y que cada segmento de 800 indicaba el número de kilómetros avanzados en cada hora.

A partir de esta representación gráfica, la representación mental del problema en forma correcta por los estudiantes estaba casi asegurada. Pasaron a la pizarra cinco grupos que explicaron cinco diferentes traducciones matemáticas del problema:

a) El primer grupo usó la multiplicación y la diferencia para traducirlo:

   7200 – (800 x 2) =
   7200 – 1600 = 5600

   Le faltan 5600 km para llegar.

b) El segundo grupo utilizó la suma y diferencia:

7 200 – (800 + 800) =
7 200 – 1 600 = 5 600 km.

c) El tercer grupo utilizó únicamente una sustracción:

7 200 – 800 – 800 = 5 600 km.

d) El cuarto grupo usó tres operaciones de división, sustracción y multiplicación:

7 200 : 800 = 9   9 – 2 = 7   7 x 800 = 5 600 km

El profesor comentó que la propuesta era "un cañón para matar una mosca" pero que era válida y propuso esta traducción que ligaba las tres operaciones:

[(7200 : 800) – 2] · 800 =
[9 – 2] · 800 =
7 · 800 = 5 600 km

e) El último grupo argumentó utilizando división, resta y una tabla de proporciones:

(7200 : 800) – 2 =
9 – 2 = 7

Hora		km
1 hora	$\longrightarrow$	800
2 horas	$\longrightarrow$	1600
7 horas	$\longrightarrow$	5 600 km.

Definitivamente al contrastar las cinco vías de solución los niños enriquecieron su capacidad de argumentación y entendieron que en matemática "uno puede pensar las cosas por su cuenta"

4.1.3. ¿Existe una solución óptima?

En ocasiones discutimos sobre las soluciones presentadas y decidimos elegir el camino más simple para alcanzarla. En este caso los niños eligieron la tercera solución porque utilizaba una sola operación, la sustracción y por ello, les pareció la más simple. Pero cuando les presenté el problema siguiente cambiaron de opinión y decidieron que la solución óptima era la primera porque nos servía de modelo y base para toda una serie de problemas similares. Pensando en el asunto de la "solución modelo" me vino a la memoria la frase de Descartes: "Cada problema que resolví se convirtió en una regla que después me sirvió para hacer otros problemas" Veamos como funcionó la "solución modelo" con el nuevo problema propuesto:

Problema 35

Un chofer conduce a una velocidad promedio de 70 km por hora. Si debe recorrer 630 km, ¿cuánto le falta para llegar después de 5 horas de recorrido?

La mayoría de los niños tradujeron el problema con el esquema que correspondía a la solución modelo:

630 – (70 x 5) =
630 – 350 = 280
R: Le faltan recorrer 280 km

Cuando se les pidió una explicación del procedimiento expresaron que la solución modelo asumía la siguiente forma:

Distancia total – (Distancia recorrida en 5 horas) = distancia que falta recorrer

Es decir, que del total de las cinco soluciones presentadas, una quedó registrada en la "memoria de las soluciones" como la solución modelo, aunque no podemos asegurar que las demás no hayan sido y no continúen siendo utilizadas, pues lo que es familiar para la mayoría de los alumnos, suele no serlo para todos.

4.2. La representación de la suma y diferencia

Veamos una estrategia para abordar un problema sobre la suma y diferencia de dos números. Éste es un tipo de problema donde los niños de 5º y 6º necesariamente tienen que utilizar una estrategia para alcanzar razonamiento adecuado porque generalmente no conocen el algoritmo ni mucho menos la solución algebraica.

4.2.1. Análisis de un problema sobre la suma y diferencia

Para ello vamos a volver al problema 28 de las monedas que dejamos sin resolver en el capítulo anterior al tratar el análisis de la respuesta.

Problema 36

Entre mis dos manos tengo 12 monedas pero en la mano derecha tengo dos más que en la izquierda. ¿Cuántas monedas tengo en la mano izquierda y cuántas en la mano derecha?

Cada vez que he solicitado a los profesores de primaria que resuelvan este problema, casi siempre me presentan la solución algebraica, que es correcta pero no apropiada para los niños si desconocen las representaciones algebraicas:

Mano izquierda: a
Mano derecha : a + 2

Si los niños de 5º llegasen a plantear esta ecuación, suponiendo que “a” es la mano izquierda, la podrían resolver colocando la doble barra para indicar cada paso:

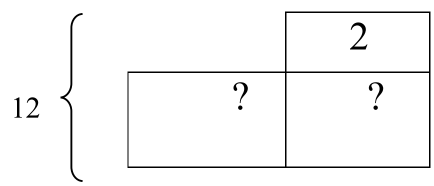
$a + (a + 2) = 12$ // eliminando el paréntesis, tenemos:
$a + a + 2 = 12$ // restando 2 a cada miembro
$a + a = 12 - 2$ // resolviendo las operaciones indicadas en ambos miembros
$2a = 10$ // dividiendo entre dos cada miembro
$a = 5$

Mano derecha: $a + 2 = 5 + 2 = 7$

R: Tengo 5 monedas en la mano izquierda y 7 en la derecha.

Este proceso no es adecuado para iniciar al niño en la solución de este problema, al menos si no conoce el planteo y la resolución de ecuaciones. Cuando los niños aún no conocen el lenguaje del álgebra y piensan en esta estructura la representan de otra manera y resuelven el problema usando procedimientos aritméticos.

Cuando enunciamos el problema les solicitamos, como profesores, la representación gráfica de los datos. Aunque algunos dibujaron los 12 elementos para resolver por tanteo y cálculo, otros diseñaron una representación con números. A partir de los diferentes gráficos que recibimos en clase esbozamos éste, porque representa adecuadamente la relación entre los datos y la incógnita:



Un estudiante explicó que se podía igualar lo que el niño tenía en ambas manos si calculamos:

$12 – 2 = 10$

Luego repartimos la cantidad igualada entre ambas manos:

$10 : 2 = 5$

Así tenemos 5 monedas para la mano izquierda, que tiene 2 menos que la derecha. Si queríamos obtener las monedas de la mano derecha sólo teníamos que aumentarle 2: $5 + 2 = 7$

Así tenemos, 7 monedas para la mano derecha y 5 para la izquierda, lo que nos permite comprobar el cumplimiento de las dos condiciones del problema:

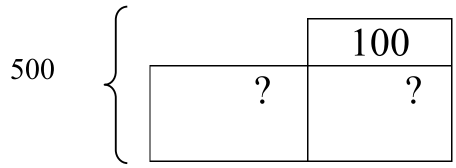
1) Monedas de la MD + monedas de la MI = 12
$7 + 5 = 12$

2) Monedas de la MD – monedas de la MI = 2
$7 – 5 = 2$

4.2.2. La consolidación del aprendizaje

Después de esta experiencia invitamos a la clase a resolver un problema de estructura similar donde podían utilizar el modelo propuesto:

> **Problema 37**
>
> Papá y mamá ahorran juntos $ 500 pero papá ha puesto $ 100 más que mamá. ¿Con cuánto contribuyó cada uno?



Anotamos los datos y los niños fueron capaces de entender la relación entre los datos y la incógnita, y seleccionar las operaciones adecuadas. En primer lugar, restaron la diferencia para dividir entre dos e igualar las cantidades, lo que permitió obtener el número menor:

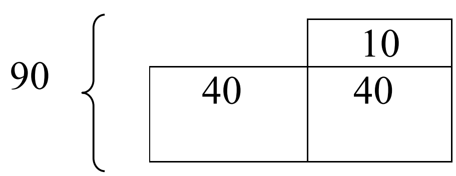
(500 – 100) : 2 = 200

En segundo lugar, añadieron la diferencia al menor, para hallar el número mayor.
200 + 100 = 300

R: Mamá contribuyó con S/. 200 y papá con S/. 300.

Finalmente pedimos a los niños que planteen un problema utilizando el concepto aprendido. Cada grupo elaboró su problema y los alumnos escogieron el problema que les agradaba más. El problema seleccionado fue el siguiente:

> **Problema 38**
>
> ¿Qué edades tienen papá y mamá si la suma de sus edades es 90 años pero papá es 10 años mayor que mamá?



M = 40 P = 50

Restaron 90 – 10 = 80 y luego dividieron entre dos, 80 : 2 = 40. Mamá quedó con 40 años pero como papá tenía 10 más, sumaron 40 + 10 = 50.

Otro problema interesante fue el que comparaba el contenido de dos cajas, que fue resuelto de modo semejante.

Problema 39

Dos cajas contienen en total 24 plumones pero la caja más pequeña tiene 6 plumones menos que la grande. ¿Cuántos plumones hay cada caja?

Una semana después, el 50% de los niños de 5º grado, resolvieron en el examen un problema similar. El otro 50% no pudo darse cuenta de la estructura matemática del problema, lo cual es también atribuible a otros factores como son la capacidad de concentración durante la lectura y la forma desorganizada como algunos niños almacenan su base de datos en la memoria, que no les permite la evocación oportuna. Analicemos el problema del examen y su dificultad.

Problema 40

Una escuela de dos pisos tiene un total de 56 aulas pero el primer piso tiene 14 aulas más que el segundo. ¿Cuántas aulas tiene en cada piso?

El error más común que cometieron en la prueba fue dividir 56 entre dos y luego sumar directamente al resultado a la diferencia.

56 : 2 = 28
28 + 14 = 42 en el primer piso
28 – 14 = 14 en el segundo piso

Como ya analizamos, se cumple la primera condición por la cual la suma es 56 pero no la segunda puesto que la diferencia entre 42 y 14 es 28 y no 14. Sin embargo, además de aplicar la solución explicada, algunos alumnos resolvieron el problema con un método diferente que implicaba la división inicial de la suma y la división posterior de la diferencia, obteniendo con la suma de ambos el número mayor y con la resta de ambos el número menor, lo que demuestra que cuando los niños aprenden a razonar, son también capaces de encontrar soluciones alternativas originales. Veamos este nuevo camino de solución:

56 : 2 = 28 y tengo 28 que es la mitad de la suma
14 : 2 = 7 y tengo 7 que es la mitad de la diferencia
Sumando la mitad de la suma y la mitad de la diferencia tengo 28 + 7 = 35 aulas en el primer piso y restando a la mitad de la suma, la mitad de la diferencia tengo:
28 – 7 = 21 aulas en el segundo piso.
R: En el segundo piso hay 21 aulas y 35 en el primero.

Sin duda esta solución aritmética es más difícil de entender que la primera, pero algunos niños son capaces de entenderla incluso sin el gráfico.
¿Cuál es la ventaja de permitir que los niños presenten soluciones alternativas? Sin duda esto enriquece el debate argumentativo y contribuye a cimentar la idea que en matemáticas **cada uno puede pensar las cosas por su cuenta**.

4.2.3. La algoritmización de la solución

Sin embargo, algunos profesores, piensan que estos razonamientos no son alcanzados por todos, en especial por los que tienen dificultades específicas de razonamiento matemático, y por esta razón opinan que es mejor algoritmizar la solución para que todos la alcancen democráticamente.

Así, para este problema, proponen una fórmula que puede ser almacenada en la memoria a largo plazo de un modo más eficaz. La fórmula relaciona los 4 elementos básicos del problema: la suma de dos números, la diferencia de dos números, el número mayor y el número menor.

Dados un número menor (men) y otro mayor (may), su suma (S) y su diferencia (D) entonces:

Numero men = $\frac{S - D}{2}$ o también Num men = $\frac{S}{2} - \frac{D}{2}$

Numero may = $\frac{S + D}{2}$ o también Num may = $\frac{S}{2} + \frac{D}{2}$

Cuando enseñemos la fórmula podemos hacer hincapié en la ley de la distribución porque este principio explica formalmente el porqué ambas soluciones funcionan ya que:

$$\frac{S - D}{2} = \frac{S}{2} - \frac{D}{2}$$

$$\frac{S + D}{2} = \frac{S}{2} + \frac{D}{2}$$

¿Tiene ventajas aprender las soluciones a través de fórmulas? Es cierto que la fórmula permite almacenar la solución en la MLP con más eficiencia, pero todo a su tiempo. En nuestra opinión la temprana algoritmización de la solución garantiza el éxito inmediato porque mecaniza la solución pero cuando ésta se da, antes que el alumno haya alcanzado la solución por razonamiento aritmético no contribuye a desarrollar la capacidad de deducción. Lo que sucede a menudo, es que algunos maestros pierden la paciencia y ponen la fórmula por delante del razonamiento para ganar tiempo.

En nuestra opinión es mejor desarrollar estrategias creativas y posponer la fórmula hasta que el razonamiento y la intuición matemática hayan rendido sus mejores frutos. Cuanto esto ha ocurrido ya podemos enseñar la fórmula para asegurar y consolidar un aprendizaje alcanzado por el razonamiento y no sólo por la memoria.

De este modo, si asumimos el enfoque problémico, la algoritmización de la solución debe ser el último paso y más bien el producto final de un trabajo de laborioso razonamiento. Puede ser en verdad la culminación de un proceso pero nunca su punto de partida pues como decía un profesor *"una vez que conocemos la fórmula se acabó el tener que pensar" y si bien esto es adecuado en un centro laboral, donde enfrentamos problemas para reducir tiempo y costos, no lo es necesariamente en un aula escolar donde formamos esquemas de razonamiento*.

De hecho en la mayoría de centros laborales dedicados a enfrentar problemas de ingeniería se trabaja con fórmulas de cálculo, que en realidad son algoritmos creados por matemáticos con gran solvencia y demostrados con gran laboriosidad matemática. Esta es una de las formas, como los matemáticos contribuyen a resolver problemas que plantea el mundo real, y evita que en cada caso los ingenieros tengan que darse el trabajo de deducir, lo que representa un notable ahorro de tiempo y esfuerzo que mejora la productividad. Pero aún así, nosotros pensamos que la fórmula en el aprendizaje escolar es el paso final que resume y consolida el aprendizaje y no su punto de partida.

Sólo entendiendo el papel de la fórmula en el aprendizaje podemos administrar su uso y no caer en su abuso, pues actualmente muchos colegios que utilizan métodos pre-universitarios las aplican para que los niños de primaria resuelvan problemas que están por encima de su capacidad de razonamiento pero que gracias a "su magia" pueden solucionar sin haber comprendido. Esta aproximación formal a la matemática, deforma en la mente del niño el sentido del quehacer matemático y aunque tiene resultados inmediatos, a largo plazo es perjudicial para la formación del niño.

Sin embargo, es conveniente que los maestros aprendan a algoritmizar algunos problemas para que a partir de la comprensión de la solución formal del problema puedan ser más flexibles a la hora de examinar las soluciones presentadas por los estudiantes. Por ejemplo, la segunda solución dada por un niño, no es fácilmente aceptada por el maestro si no conoce el algoritmo respectivo y la aplicación de la propiedad distributiva:

$$\frac{S-D}{2} = \frac{S}{2} - \frac{D}{2}$$

$$\frac{S+D}{2} = \frac{S}{2} + \frac{D}{2}$$

El conocer estos algoritmos es indispensable para que el maestro pueda juzgar el alcance y la corrección de las soluciones ofrecidas por los niños. En muchas ocasiones, los maestros rechazan soluciones acertadas, simplemente porque carecen de conocimientos que les den una perspectiva adecuada para juzgarlas.

También es importante que el maestro aprenda a algoritmizar las soluciones, pero no para anticipar la respuesta a sus alumnos e impedir que razonen, sino para ampliar las posibilidades de fundamentar la solución a un problema y finalmente para consolidar el aprendizaje, dando la fórmula en el momento oportuno con el objetivo de fijarla del modo más breve en esa "memoria de las soluciones", de la cual nos hablaban, recordemos, los guestaltistas.

4.3. El uso del cuadro de doble entrada.

El cuadro de doble entrada tiene múltiples usos pero se muestra particularmente adecuado cuando se trata de problemas de dinero.

Problema 41

Mamá tiene que repartir $ 31 y para ello dispone de monedas de tres valores diferentes: $ 2, $ 5 y $ 10. Sabemos que puede hacerlo de 6 maneras. ¿Cuántas monedas de cada tipo necesita en cada uno de los 6 casos? Debe usar solamente los valores dados pero podría no usar alguno de los tres.

Mon de $ 2	Mon de $ 5	Mon de $ 10	Total según mon	Total
○○○	○○○	○	6 + 15 + 10	31
○○○	○○○○○		6 + 25 + 0	31
				31
				31
				31
				31

En este caso, una de las entradas es constante pero podrían colocarse dos diversas cantidades, cambiando la condición del problema y diciendo que unas semanas reparte 31 soles pero otras, solamente 21 soles, por ejemplo.

Analicemos ahora un problema de compra-venta con los conceptos de precio de venta, precio de costo y ganancia.

Problema 42

Un almacén compra a un fabricante 59 lavadoras por $ 44 132 en total y luego quiere venderlas ganando $ 250 en cada lavadora.

Se deja que los alumnos planteen las preguntas, y luego cerramos el problema aceptando al menos dos de estas cuatro preguntas, aunque la situación ideal sería que los alumnos formulasen las cuatro.

a) ¿En cuánto compró cada lavadora?
b) ¿En cuánto las debe vender para ganar $ 250 por cada una?
c) ¿Cuánto dinero recibirá en total al vender las 59 lavadoras?
d) ¿Cuánto dinero ganará en total en la venta de todo el lote?

Luego damos una lectura al problema trabajando en grupos, y dialogando para cerciorarnos que los alumnos comprendan los significados de los términos costo, venta y ganancia e incluso que distingan entre costo por unidad y costo total, venta por unidad y venta total. Les pedimos que anoten en un cuadro los datos conocidos sobre los precios de costo, venta y ganancia, tanto por unidad como del total, y que dejen en blanco los datos no conocidos. Llamamos a la pizarra a uno de los grupos que anotó correctamente los datos. Encontramos un caso en que estos datos fueron colocados, usando la estrategia del cuadro de compra- venta por cada unidad y por el total de unidades.

Art: Lavadoras	Por una sola unidad	Por el total de **59** unidades
Precio de venta	?	?
Precio de costo	?	$ 44 132
Ganancia	$ 250	?

Con su ayuda explicamos la operación para determinar el precio de una lavadora. Ellos estaban en la última fase del proceso de aprendizaje de la división e intervinieron en cada caso para explicar por qué la primera estimación no les resultó. En este caso el problema nos sirvió de base para culminar la explicación del algoritmo de la división en casos de difícil estimación.

```
44 132 :59=748
41 3
  2 83
  2 36
    472
    472
      0
```

¿Por qué? Si tomamos 441 : 59 calculamos 44 : 5 = 8 pero no es correcto poner 8 porque al multiplicarlo por 59 nos da 472 y se pasa de 441. Entonces probamos con uno menos, 7 y así nos da 28 como residuo.
Ahora sucederá lo mismo al bajar el 3 y calcular el 28 entre 5, que normalmente debería ser 5, pero se pasa y es en realidad 4.
Lo mismo sucede al bajar 2, la tercera cifra porque 47 : 5 debería ser 9, pero se pasa y debemos bajar a 8.

Una vez que los niños determinaron el precio de costo de una lavadora en $ 748, mirando el cuadro, les fue posible argumentar como obtener el precio de venta, sumando el costo de $ 748 más la ganancia de $ 250 que se pretende obtener. Luego, dado que encontraron el precio de venta de una lavadora pudieron fácilmente determinar el precio de venta de 59 lavadoras y restando el precio de costo total, la ganancia por la venta en total. Resumiendo en dos operaciones:

[(44 132 :59) + 250] x 59 =
[748 + 250] x 59 =
998 x 59 = 58 882

58 882 – 44 132 = 14 750

R: El almacén compró cada lavadora en $ 748 y debe venderla en $ 998. El total de lavadoras las vendió en $ 58 882 obteniendo una ganancia de $ 14 750.

Este problema nos sirvió para completar el aprendizaje del algoritmo de la división pero también puede plantearse con cifras más simples. Especialmente si notamos que después de este problema, algunos alumnos tienen todavía cierta dificultad para distinguir entre el precio de venta y la ganancia.

En este caso, podemos recurrir al ejemplo de la venta de tickets para una fiesta pro-fondos, con la finalidad de realizar un viaje. ¿Nos quedamos con todo el dinero de los tickets vendidos? ¿O debemos descontar los costos de los bocadillos, y otros gastos que necesariamente hacemos?

Al respecto planteamos el siguiente problema.

Problema 43

Nuestra clase organizó una fiesta pro-fondos de un viaje a Paracas. En la fiesta se vendieron en S/. 42 000 en total, unas canastas de navidad que nos habían costado nada menos que S/. 36 078 en total.

a) ¿Cuánto ganamos para nuestro viaje?
b) Si ganamos S/. 141 en cada canasta, ¿cuántas canastas vendimos?
c) ¿Cuánto nos costó cada una?
d) ¿Y en cuánto vendimos cada una?

Continuamos resolviendo en equipo y les pedimos que cada grupo llene los datos en el siguiente cuadro.

	Por una canasta	Por todas las □ canastas
Precio de venta	?	S/. 42 000
Precio de costo	?	S/. 36 078
Ganancia	141	?

Como en el caso anterior llamamos a un grupo, aunque no necesariamente al que ya resolvió el problema, para que complete los datos del cuadro.

Lo lógico es que encuentren primero la ganancia de todas las canastas que nos da un total de S/. 5 922 y que luego, sabiendo que por una canasta se ganó $ 141, encuentren el número de canastas vendido. Conociendo el número de canastas es posible inferir el precio de costo por unidad.

Para resolver el precio de venta de cada canasta hay dos caminos:

a) Sumamos el precio de costo + la ganancia
b) Dividimos el precio total de la venta entre 42 canastas.

Dejamos que cada grupo argumente a favor de la suya. Sin duda un grupo dirá que más fácil es sumar dos cantidades pequeñas que dividir con un dividendo de 5 cifras. Pero no faltará el niño que sostenga que es mejor dividir puesto que se trata de una división por cálculo mental.

Lo importante es que las dos diferentes vías de solución nos sirven para hacer la comprobación de nuestros resultados que es el paso más importante al finalizar un problema. Resumiendo el problema en dos operaciones tenemos:

[(42 000 – 36 078) : 141]
[5 922 : 141] = 42 canastas

(36 078 : 42) + 141 = 859 + 141 = 1000

o también

(42000 : 42) – 141 = 1000 – 141 = 859

R: Ganamos $ 5922 vendiendo 42 canastas. Nuestro precio de costo fue de $ 859 y el precio de venta de $ 1000.

En base a esta estructura podemos elaborar variados problemas, dando sólo 3 datos y dejando, que en base a ellos, los niños encuentren otros.

Así por ejemplo, podemos plantear este problema, donde no es necesario aplicar la técnica operativa, sino que basta el cálculo mental.

Problema 44

Vendí en $ 8 100, unos caballos en cuya venta gané $ 1800. Si cada caballo me costó $ 700, ¿cuántos caballos vendí y a qué precio?

Con el cuadro de doble entrada:

	Por una caballo	Por todos los ? caballos
Precio de venta	?	$ 8 100
Precio de costo	$ 700	?
Ganancia		$ 1 800

Con operaciones combinadas por cálculo mental:

8 100 : [(8 100 – 1 800) : 700] =
8 100 : [6 300 : 700] =
8 100 : 9 = 900

R: Vendí 9 caballos a $ 900 cada uno.

La comprobación de la respuesta se podría hacer restando el precio de venta por unidad que es de $ 900 menos el precio de costo por unidad que es de $ 700, lo cual nos da $ 200 como ganancia por unidad, que es exactamente la misma cantidad que obtenemos al dividir la ganancia total de $ 1 800 entre los 9 caballos.

900 – 700 = 1800 : 9

Como hemos afirmado, esta estrategia nos da un punto de partida para trabajar por lo menos con 6 problemas diferentes, usando el mismo problema base, según los datos que proporcionemos y los datos faltantes.

4.4. Los diagramas para el complemento, la diferencia y la igualación.

4.4.1. Los diagramas para el complemento.
Veamos un problema simple de complemento con tres términos, como corresponde al 5º grado.

> **Problema 45**
>
> Una refrigeradora, una cocina eléctrica y un horno microondas costaron $ 1560 en total. Si la refrigeradora costó $ 760 y la cocina $ 420. ¿Cuánto costó el horno microondas?

Los alumnos encontraron que la relación entre datos e incógnita podía expresarse con este diagrama:

Refrigeradora	Cocina elec	Horno mic
760	420	?
$ 1 560		

A partir de este diagrama surgieron soluciones como ésta, que es la solución típica del complemento:

760 + 420 + □ = 1 560
1 180 + □ = 1560
□ = 380

O usando una sola operación de doble sustracción:
1560 – 720 – 420 = 380

O combinando suma y resta:
1 560 – (760 + 420) =
1560 – 1 180 = 380

R: El horno microondas costó $ 380

Ahora veamos un problema de combinación aditiva, donde interviene el concepto de comparación aditiva y complemento aditivo.

> **Problema 46**
>
> En la cafetería escolar se vendieron en un mes 2 180 sandwiches. De ellos, 350 eran hamburguesas, los sándwiches de pollo eran 250 más que las hamburguesas y el resto eran mixtos. ¿Cuántos mixtos se vendieron?

El mismo diagrama sirvió a los niños para expresar la relación entre los datos y la incógnita. Pero aquí la diferencia de 250, les sirvió para hallar por comparación aditiva, la segunda clase de sándwiches y el número de elementos de la 1º y 2º clase de sándwiches, como en el caso anterior, sirvió para hallar el complemento

Hamburguesas	Sándwiches de pollo	Sándwiches mixtos
350	350 + 250	?
2 180		

Hallando el complemento aditivo tenemos:

$350 + (350 + 250) + \square = 2\,180$

$350 + 600 + \square = 2\,180$

$950 + \square = 2180$

$\square = 1\,230$

R: Se vendieron 1 230 sandwiches mixtos.

En el caso siguiente tenemos un problema de comparación entre dos clases equivalentes, en donde cada una de ellas contiene dos subclases. En este caso los niños usaron el diagrama de los cuatro términos para hallar una de las subclases.

Problema 47

En primaria hay 965 alumnos matriculados y en secundaria 615. Si a fin de mes, 1 250 alumnos han cancelado la pensión, ¿cuántos faltan pagar?

Un diagrama que representaba gráficamente la relación entre los datos y la incógnita, que bautizamos como "diagrama de los cuatro términos" era éste:

Alumnos de primaria	Alumnos de secundaria
965	615
Pagaron la pensión 1 250	No pagaron la pensión ?

Algunos propusieron la siguiente igualdad para resolverlo:

$965 + 615 = 1250 + \square$

$1580 = 1250 + \square$

$\square = 1580 - 1250$

$\square = 330$

R: Faltan pagar la pensión 330 alumnos

Otros propusieron una simple operación combinada:

$(965 + 615) - 1215 =$

$1\,580 - 1\,215 = 330$

Este problema se complica cuando comparamos dos términos, uno de los cuales desconocemos, cuya suma es equivalente a otros tres. Veamos el caso.

Problema 48

Tengo un dinero ahorrado y si mis padres me añadieran \$ 500, me alcanzaría para comprarme unos patines de \$ 258, una bicicleta de \$ 830 y todavía me quedarían \$ 155. ¿Cuánto dinero tengo ahorrado?

<table>
<tr><td colspan="2">Dinero ahorrado</td><td colspan="2">Dinero añadido</td></tr>
<tr><td colspan="2">?</td><td colspan="2">$ 500</td></tr>
<tr><td>$ 258</td><td colspan="2">$ 830</td><td>$ 155</td></tr>
</table>

Algunos resolvieron con una operación combinada:
(258 + 830 + 155) – 500 =
1 243 – 500 = 743

Mientras que otros plantearon la ecuación buscando el complemento aditivo:

□ + 500 = 258 + 830 + 155
□ + 500 = 1 243
□ = 743

R: Tengo ahorrado \$ 743.

4.4.2. El diagrama de flechas para la comparación

Los problemas de comparación pueden resolverse con un diagrama que compare las cantidades mediante dos rectas numéricas. Pueden darse casos en que debe hallarse la diferencia, dadas las dos cantidades comparadas, o casos en que a base de la diferencia deba hallarse una de las cantidades comparadas. Veamos ambos casos en un sólo problema.

Problema 49

Cuando Ana Rosa y Humberto se casaron, ella tenía 27 años y el 34. Si Humberto tiene 52 años, ¿qué edad tiene Ana Rosa actualmente?

En primer lugar se trata de hallar la diferencia entre dos edades:

Edad de Ana Rosa 27

Edad de Humberto 34

Este diagrama permitió a los niños visualizar la diferencia e interpretarla como:
34 – 27 = 7

Ahora estamos en el segundo caso, tenemos que hallar una de las cantidades que se comparan, dada la diferencia. Sabemos ahora que la diferencia de edades es de 7, lo que podemos igualmente representar:

Edad de Humberto 52

Edad de Ana Rosa

--7--

Igualmente este diagrama permitió a los niños deducir que la edad de Ana Rosa era:

52 – 7 = 45

R: Ana Rosa tiene 45 años actualmente

Pero también puede darse el caso, como ya vimos anteriormente, que una de las cantidades comparadas deba hallarse por adición.

Problema 50

En el campeonato de bala Pepe logró el segundo puesto con una marca de 17 m 50 cm, que era 80 cm menor que quien obtuviera el primer puesto. ¿Qué marca obtuvo el ganador del torneo?

Los niños entendieron la relación con este diagrama:

Pepe 17,50 m

---0,80 m--

El ganador

17,50 m + 0,80 m = 18,30 m

R: El ganador obtuvo una marca de 18 m 30 cm.

Los problemas de igualación son similares a los de comparación pero aquí se trata de manipular las cantidades para igualarlas.

Problema 51

El equipo de “Los petirrojos” ha anotado 24 goles en el torneo y el equipo de “Los tucanes” 32. ¿Cuántos goles deben anotar “Los petirrojos” para igualar al equipo de “Los tucanes”?

Igualmente podemos recurrir a las flechas para representar los datos:

Los petirrojos $\longrightarrow$ 24

Los tucanes $\longrightarrow$ 32

32 – 24 = 8

R: Deben anotar 8 goles.

Asimismo en la igualación hay casos más complejos. Veamos dos problemas con ligeras variantes donde la estrategia de las dos rectas puede ser utilizada:

Problema 52

Una bolsa tiene 32 bombones y otra 40 bombones. ¿Cuántos bombones hay que quitar a la primera para que añadiéndolos a la segunda, ambas bolsas tengan igual número?

$\longrightarrow$ Bolsa de 40 bombones

$\longrightarrow$------- Bolsa de 32 bombones

En este caso, se trata de hallar la diferencia y dividirla equitativamente entre las dos bolsas para que ambas contengan igual número de bombones:

(40 – 32) : 2 =
8 : 2 = 4

Como podemos comprobar:
40 – **4** = 36
32 + **4** = 36

R : Para igualar el número de bombones de ambas bolsas será necesario quitar 4 bombones a la primera bolsa para colocar 4 en la segunda.

Problema 53

Dos cajas contienen el mismo número de monedas antiguas que es de 60. Si de la primera se sacan 18 monedas para colocarlas en la segunda, ¿cuántas monedas más habrá en la segunda?

Primera caja $\longrightarrow$ 42--------------- 60 – 18 = 42

Segunda caja $\longrightarrow$ --------------------78
60 + 18 = 78

Establecemos las nuevas cantidades para hallar la nueva diferencia:

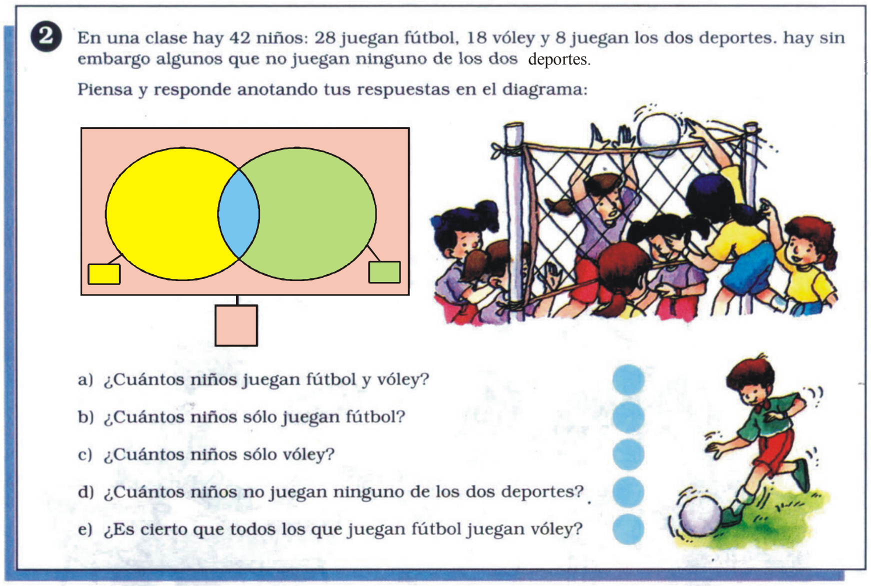
(60 + 18) – (60 -18) =
78 - 42 = 36

R: En la segunda habrá ahora 36 monedas más que en la primera

4.5. Los diagramas de la lógica: los diagramas de Venn y otros

4.5.1. Los diagramas de Venn

Problema 54



❷ En una clase hay 42 niños: 28 juegan fútbol, 18 vóley y 8 juegan los dos deportes. hay sin embargo algunos que no juegan ninguno de los dos deportes.

Piensa y responde anotando tus respuestas en el diagrama:

a) ¿Cuántos niños juegan fútbol y vóley?

b) ¿Cuántos niños sólo juegan fútbol?

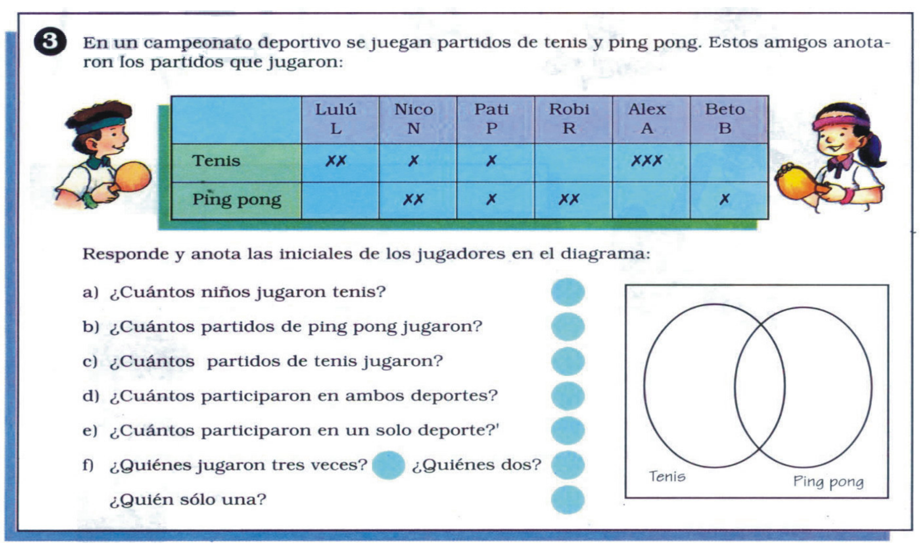
c) ¿Cuántos niños sólo vóley?

d) ¿Cuántos niños no juegan ninguno de los dos deportes?

e) ¿Es cierto que todos los que juegan fútbol juegan vóley?

Ahora combinemos el diagrama de Venn con el cuadro de doble entrada:

Problema 55[3]



❸ En un campeonato deportivo se juegan partidos de tenis y ping pong. Estos amigos anotaron los partidos que jugaron:

	Lulú L	Nico N	Pati P	Robi R	Alex A	Beto B
Tenis	✗✗	✗	✗		✗✗✗	
Ping pong		✗✗	✗	✗✗		✗

Responde y anota las iniciales de los jugadores en el diagrama:

a) ¿Cuántos niños jugaron tenis?

b) ¿Cuántos partidos de ping pong jugaron?

c) ¿Cuántos partidos de tenis jugaron?

d) ¿Cuántos participaron en ambos deportes?

e) ¿Cuántos participaron en un solo deporte?'

f) ¿Quiénes jugaron tres veces? ¿Quiénes dos?

¿Quién sólo una?

[3] Ferro, Antonieta. Matemática 4. Ed. IBE Lima, 2004, pp 163

4.5.2. Los diagramas de Lewis Carroll

Algunos problemas se resuelven fácilmente si usamos el diagrama de Lewis Carroll, el matemático que escribió Alicia en el pais de las maravillas:

Problema 56

2 En una clase del conservatorio de música hay 28 niños; 20 saben tocar flauta y 7 saben tocar guitarra y flauta, mientras 3 todavía no tocan ninguno de los dos instrumentos.

Responde anotando los datos en el diagrama de CARROLL:

	Tocan guitarra	No tocan guitarra
Tocan flauta		
No tocan flauta		

a) ¿Cuántos saben tocar flauta y guitarra?

b) ¿Cuántos no tocan ni flauta ni guitarra?

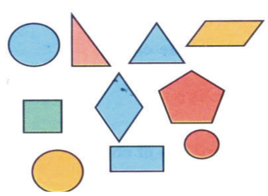
c) ¿Cuántos tocan flauta pero no guitarra?

d) ¿Cuántos tocan guitarra pero no flauta?

También podemos usarlos para clasificar figuras geométricas:

Problema 57

3 Clasifica las siguientes figuras dibujándolas en las casillas que les corresponde:



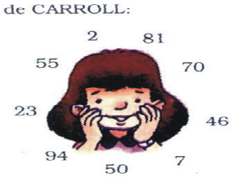
	Cuadriláteros	No cuadriláteros
Azules		
No azules		

O para clasificar números:

Problema 58[4]

4 Clasifica los siguientes números anotándolos en el diagrama de CARROLL:

	Pares	Impares
Mayores de 50		
Menores o iguales de 50		

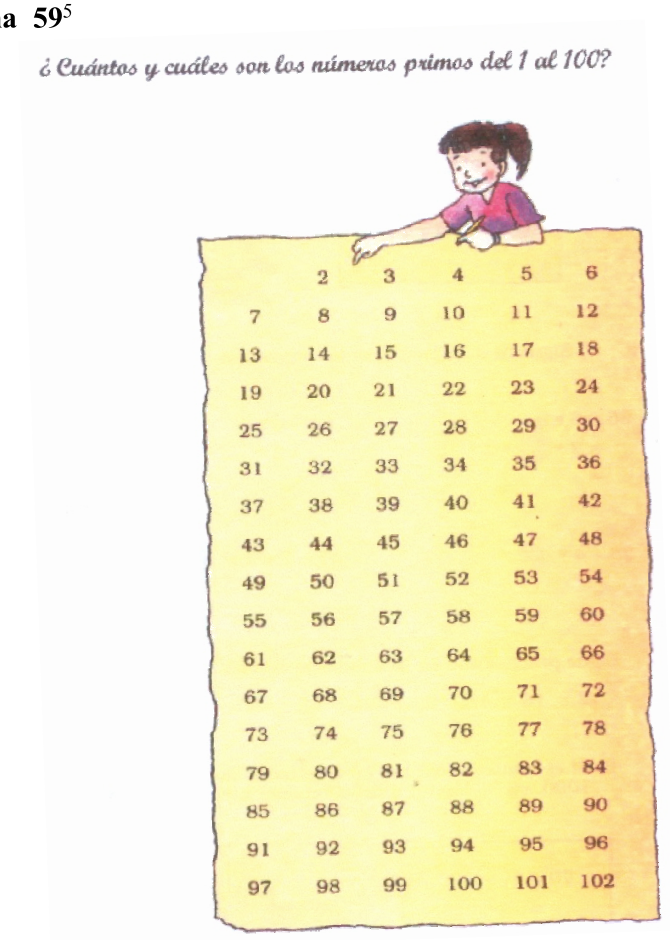


[4] Ferro, Antonieta. Matemática 4. Ed. IBE Lima, 2004, pp 165

4.5.3. El diagrama de árbol

Para descomponer los números compuestos en sus factores primos podemos usar el diagrama de árbol. Pero antes de trabajar con la descomposición en números primos podemos presentarlos a través de la Criba de Eratóstenes desarrollada en un nuevo formato.

Problema 59[5]



Colocamos un círculo alrededor de 2 y luego tarjamos todos sus múltiplos. Luego hacemos lo mismo con los múltiplos de 3, 5 y 7. Mientras los múltiplos de 2 y 3 se tarjarán con paralelas verticales, los múltiplos de 5 y 7 quedarán tarjados con paralelas diagonales. Por último, colocamos un círculo alrededor de todos los números no tarjados y comprobamos que todos son números primos con lo cual hallamos la respuesta al problema planteado.

R: Los números primos menores que 100 son 25 y son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 y 97.

[5] Ferro, Antonieta. Matemática 6. Ed. IBE Lima, 2004, pp 137

En el 5º y 6º grado los niños deben conocer los números primos menores a 100 y además deben saber descomponer en sus factores primos, todos los números compuestos en este campo. Pero además pueden lograr la descomposición de las centenas netas y de los millares netos que pueden obtenerse por analogía, a partir de ellos. Por ejemplo si pueden descomponer 54, podrán lograr la descomposición de 540 o de 5 400. En nuestra experiencia, la agilidad en el cálculo con múltiplos y divisores es un conocimiento indispensable para la adecuada ejecución de las operaciones por cálculo mental en la resolución de problemas.

Para lograr este propósito usamos el diagrama de árbol estableciendo tres tipos de descomposiciones:

a) Cuando los números terminan en cero utilizamos el número 10 para efectuar las descomposiciones en forma más ágil. Recordamos que por cada cero utilizamos un 10. Observamos el desarrollo del método y descomponemos

$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$
$9 \cdot 10$
$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5$

$9\,000 =$
$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$

$800 =$

b) Cuando los números se hallan como productos de la tabla de multiplicar que el alumno ha memorizado utilizamos los factores memorizados.

$72 = 2^3 \cdot 3^2$
$8 \cdot 9$
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

$48 =$

$54 =$

c) Cuando los números no terminan en cero ni se conocen como productos de la tabla de multiplicar recurrimos a las reglas de divisibilidad entre 2, 3, 5, 7, … para saber si el número es divisible entre algunos de esta serie y realizar así la descomposición.

$75 = 3 \cdot 5^2$
$3 \quad 25$
$3 \cdot 5 \cdot 5$

$34 =$ ______
$2 \cdot 17$

$95 =$

$84 =$ ______
$7 \cdot 12$
$7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$

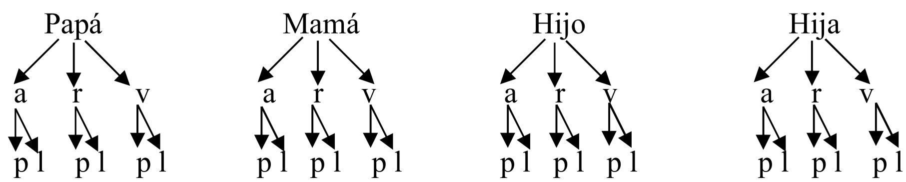
$78 =$

$144 =$

Los niños pueden aprender a descomponer ágilmente si dividimos la clase en tres grupos y realizamos concursos entre los representantes de cada grupo en la pizarra. El primer grupo que sale a la pizarra debe incluir a los tres alumnos más hábiles en cálculo de cada grupo, el segundo debe estar formado por dos de mediana habilidad pero que tengan cierto grado de seguridad y el tercer grupo por alumnos que aunque tienen dificultades, desean participar. Al día siguiente deben concursar los restantes que ya han tenido ocasión de practicar y de este modo la competencia puede ser equitativa.

Los diagramas en árbol también pueden ser utilizados para la confección de tarjetas lógicas que contengan diversas variables. Por ejemplo, para confeccionar 24 tarjetas que comprendan:

4 personajes: papá, mamá, hijo e hija
3 colores de polos: azul (a), rojo (r) y verde (v)
y 2 formas diversas de diseño: con puntos (p) y con líneas rectas (l)



El número de tarjetas que se obtiene se calcula multiplicando el número de variables que intervienen. Así, en este caso:
4 personajes x 3 colores x 2 formas = 24 tipos de tarjeta diferentes

Con estas tarjetas lógicas se pueden establecer algunos juegos que plantean problemas de interés para los niños:

1) Encuentra la tarjeta que tiene la mamá con el polo verde y de puntos.

2) Encuentra una tarjeta que tenga una diferencia con la anterior

3) Encuentra una tarjeta que tenga dos diferencias con la anterior

4) Ahora encuentra una tarjeta con tres diferencias con la anterior

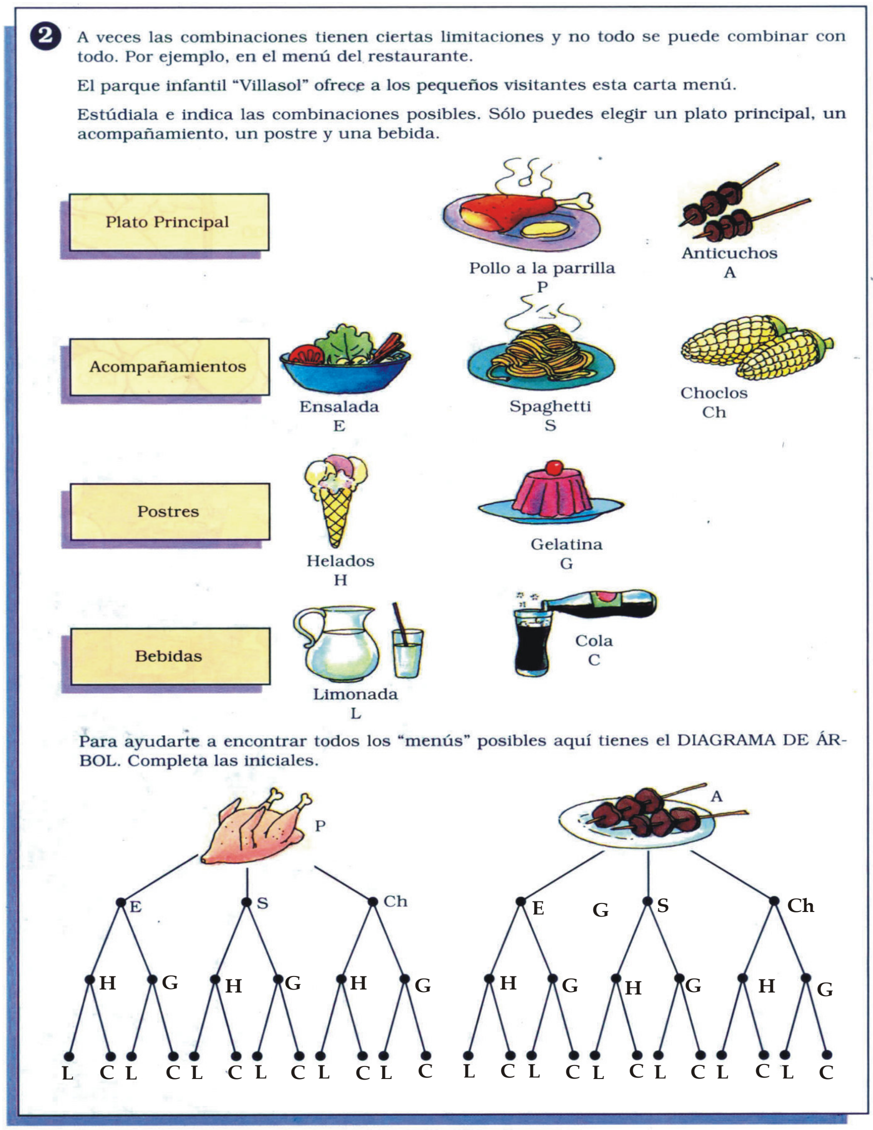
5) Coloca las 24 tarjetas en un semicírculo de modo que cada una tenga una diferencia con la anterior.

6) Reparte la mitad de las tarjetas con un amigo, ahora coloquen por turnos, en un semicírculo todas sus tarjetas de modo que cada una tenga dos diferencias con la anterior. Se comienza por sorteo y gana el primero que queda sin tarjetas.

7) Reparte la mitad de las tarjetas con un amigo, y coloquen las tarjetas según la orden que el competidor dice “una diferencia”, “dos diferencias” o “tres”. Gana el primero que coloca todas sus tarjetas.

El diagrama de árbol también puede servirnos para resolver problemas de lógica combinatoria, tales como el siguiente:

Problema 60[6]



2 A veces las combinaciones tienen ciertas limitaciones y no todo se puede combinar con todo. Por ejemplo, en el menú del restaurante.

El parque infantil "Villasol" ofrece a los pequeños visitantes esta carta menú.

Estúdiala e indica las combinaciones posibles. Sólo puedes elegir un plato principal, un acompañamiento, un postre y una bebida.

Para ayudarte a encontrar todos los "menús" posibles aquí tienes el DIAGRAMA DE ÁRBOL. Completa las iniciales.

[6] Ferro, Antonieta. Matemática 4. Ed. IBE Lima, 2004, pp 175

En algunos casos, los problemas pueden ser resueltos utilizando tanto el diagrama de árbol como un diagrama de tablas. El siguiente problema explora las posibilidades del orden de ingreso a 4 juegos en la primera opción, con 3 posibilidades como segunda opción, y con 2 en la tercera, lo que nos da 24.

El profesor puede analizar este ejemplo y luego pedir a los alumnos que confeccionen un diagrama de árbol para este mismo problema.

Problema 61[7]

1 En ciertas actividades la secuencia no importa y da lo mismo empezar por una que por otra.
En el parque infantil "Villasol" hay 4 juegos: los autos locos, los botes chocones, el paseo en pony y la lona saltarina.
Roque quiere subir a todos. ¿En qué orden podría utilizarlos? Indica con las iniciales A (auto), B (bote), P (pony) y L (lona) todas las combinaciones posibles.

Si empieza por los autos:
A – B – P – L
A – B – L – P
A – – –
A – – –
A – – –
A – – –

Si empieza por los botes:
B – A – P – L
B
B
B
B
B

Si empieza por el pony:
P – B – A – L
P – B – L – A
P – – –
P – – –
P – – –
P – – –

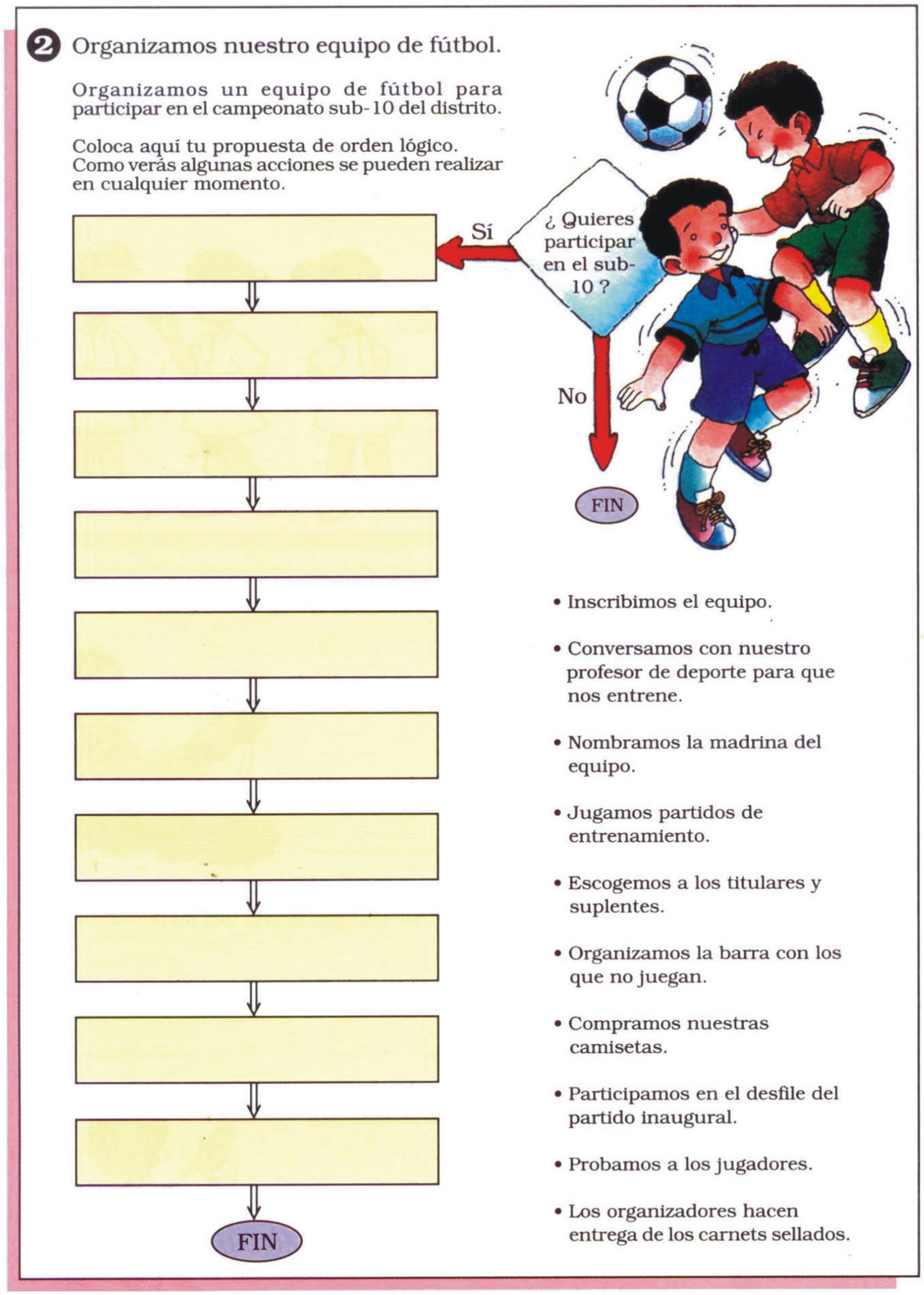
Si empieza por la lona:
L – A – B – P
L
L
L
L
L

7 Ferro, Antonieta. Matemática 4. Ed. IBE Lima, 2004, pp 174

4.5.4. El diagrama de flujo

Presentamos el diagrama de flujo lineal que puede ser muy útil a la hora de planificar paseos, campeonatos y procedimientos de trabajo que requieren una secuencia que es necesario pre-establecer. Es utilizado en la industria para ejecutar procedimientos que requieren organización en el tiempo y diversos pre-requisitos en cada paso. Aquí presentamos su uso adaptado a las actividades escolares.

Problema 62[8]



2 Organizamos nuestro equipo de fútbol.

Organizamos un equipo de fútbol para participar en el campeonato sub-10 del distrito.

Coloca aquí tu propuesta de orden lógico. Como verás algunas acciones se pueden realizar en cualquier momento.

¿ Quieres participar en el sub-10 ?

Sí

No

FIN

FIN

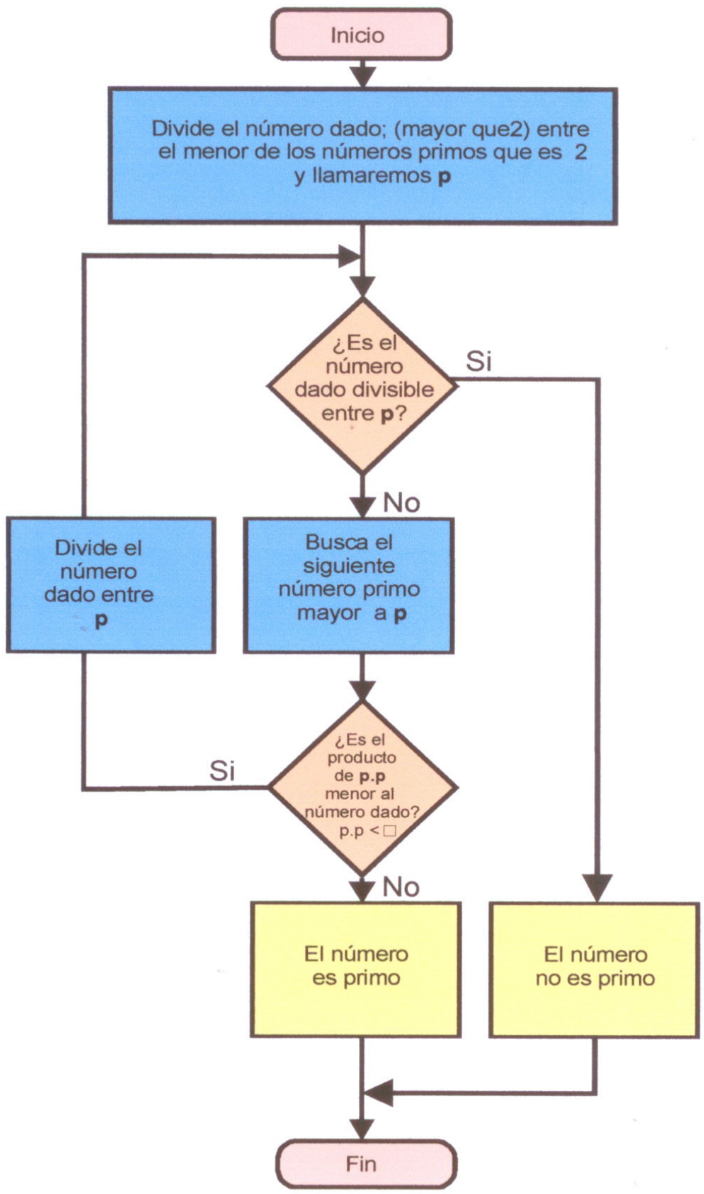
- Inscribimos el equipo.
- Conversamos con nuestro profesor de deporte para que nos entrene.
- Nombramos la madrina del equipo.
- Jugamos partidos de entrenamiento.
- Escogemos a los titulares y suplentes.
- Organizamos la barra con los que no juegan.
- Compramos nuestras camisetas.
- Participamos en el desfile del partido inaugural.
- Probamos a los jugadores.
- Los organizadores hacen entrega de los carnets sellados.

8 Ferro, Antonieta. Matemática 3. Ed. IBE Lima, 2004, pp 173

Presentamos ahora el diagrama de flujo complejo que contiene preguntas de control, que nos permiten una mejor y más confiable ejecución correcta de los pasos. Observa el diagrama para determinar si un número es o no primo.

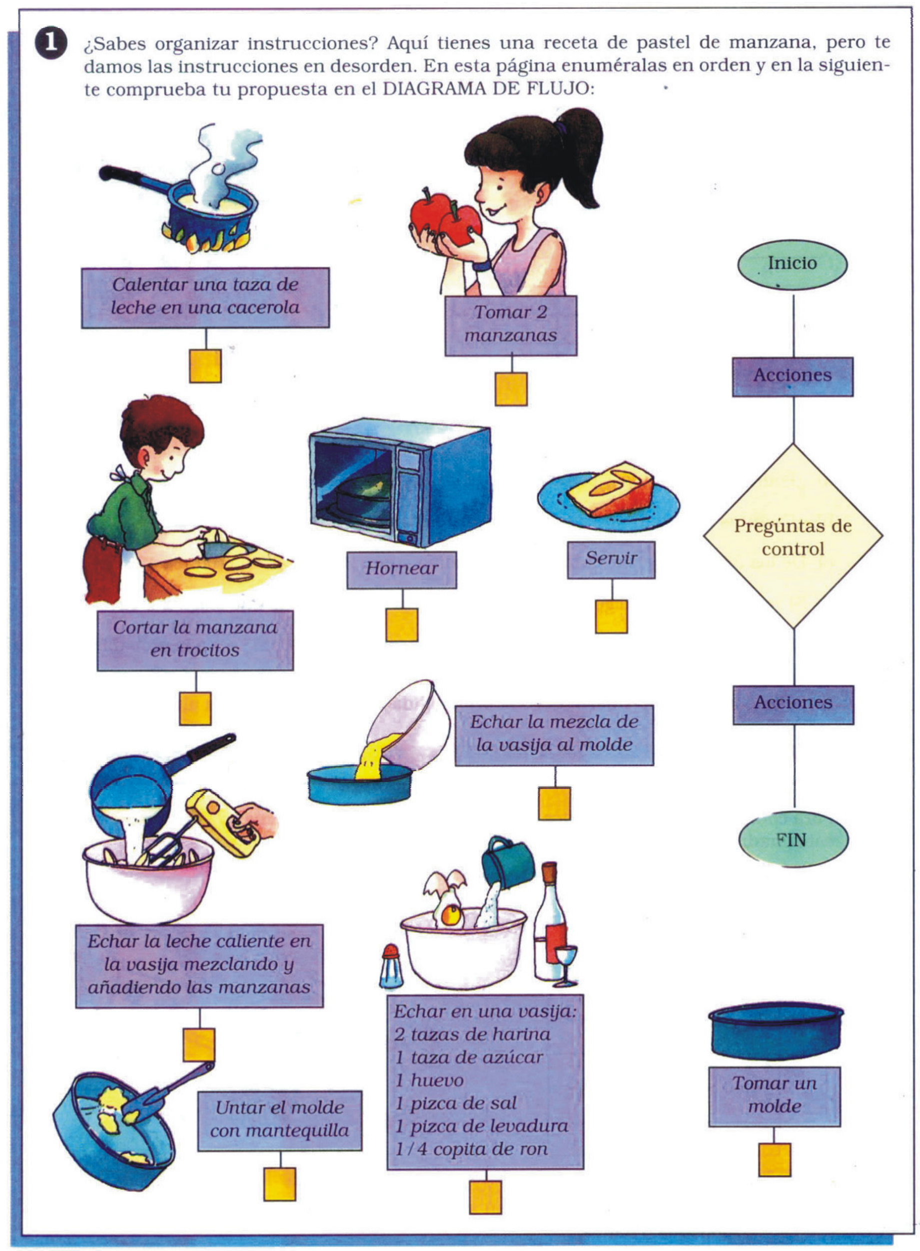
Problema 63[9]

¿Es 163 un número primo? Lo dividimos entre la serie de primos, entre 2, 3, 5, 7, 11 y 13, con resultados negativos y puesto que 13·13 = 169, lo declaramos primo y no tenemos que seguir dividiendo.



[9] Ferro, Antonieta. Curso Didáctica III. UNMSM Lima, 2007, pp 71 (Adaptación de versión alemana).

Problema 64[10]

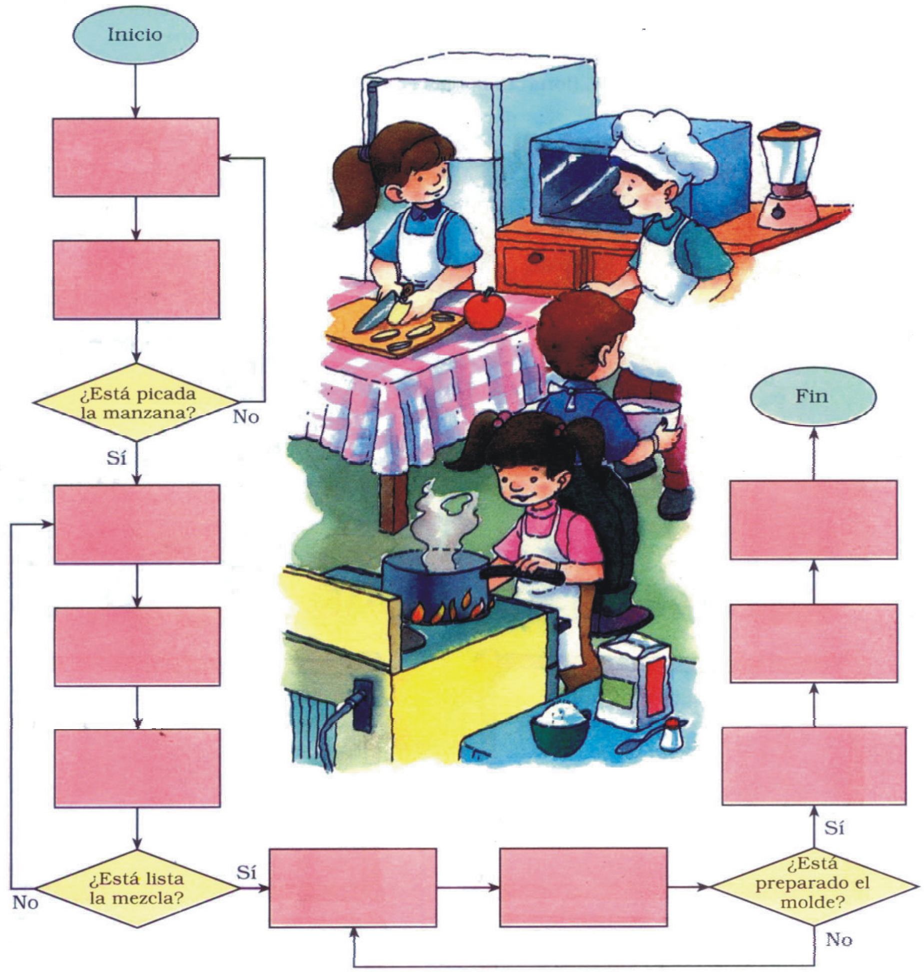


Por último, tenemos este diagrama de flujo complejo, con 3 preguntas de control, que nos permiten asegurar que vamos por el camino de solución correcto. Este diagrama puede ser usado también en el curso de Comunicación integral para la correcta redacción de las instrucciones de un procedimiento. Pero asimismo se puede utilizar en matemática para la correcta ejecución de los pasos de un algoritmo matemático.

[10] Ferro, Antonieta. Matemática 4. Ed. IBE Lima, 2004, pp 172

2 Ahora completa las instrucciones en orden.[11]

Para asegurarte que vas por el camino correcto debes responder a la pregunta de control. Si la instrucción es muy larga copia las primeras palabras y coloca el término "etc...."



3 Programa las instrucciones para armar una cometa.
Establece por lo menos una pregunta de control.

4 ¿Qué otras actividades que conoces pueden programarse a través de instrucciones?

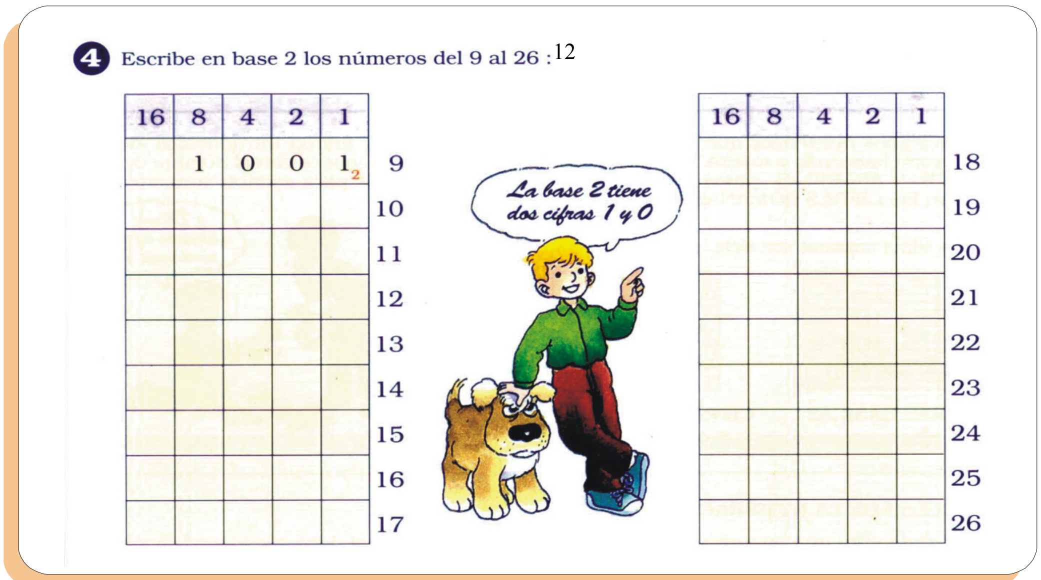
Existen otros diagramas lógicos como los diagramas de Euler, que se pueden usar para resolver problemas de inclusión de clases. Por ejemplo: ¿Son todos los múltiplos de 4, también múltiplos de 8? O este otro: ¿Son todos los divisores de 5 también divisores de 10? En estos casos, para solucionar estos problemas graficamos los conjuntos y subjconjuntos utilizando los diagramas de Euler que muestran o no, la inclusión correspondiente. En la práctica escolar, a menudo se usan los diagramas de Euler junto con los de Venn y se habla de diagramas Venn-Euler.

[11] Ferro, Antonieta. Matemática 4. Ed. IBE Lima, 2004, pp 173

4.6. Los cuadros para problemas de transformación en numeración de bases

Es importante que los estudiantes conozcan las enormes ventajas del sistema de numeración posicional. Vale la pena que investiguen de qué manera este invento de los hindúes llegó a través del contacto con los árabes a ser patrimonio de la cultura occidental y la forma en que colaboró notablemente en el surgimiento de las matemáticas y la ciencia en Occidente.

Pero nuestros descubrimientos fueron más allá, al extender el sistema posicional a bases no decimales como la base dos, que aquí presentamos. El cuadro será de mucha ayuda para su enseñanza.



Ahora analicemos tres problemas relativos a la transformación de bases:

Problema 65

En un informe estadístico trabajado por computadora en base 2, se decía que en la comunidad de Marcapomacocha habitaban 110011010_2 pobladores.
¿Qué número de habitantes tenía la comunidad?

Para resolver este problema utilizamos el cuadro de numeración posicional de base dos, anotando los valores que le corresponden a cada columna en base 10, y luego sumamos el total:

256	128	64	32	16	8	4	2	1	V. P.
1	1	0	0	1	1	0	1	0_2	
256	128	0	0	16	8	0	2	0	410_{10}

R: La comunidad tenía 410 habitantes.

[12] Ferro, Antonieta. Matemática 5. Ed. IBE Lima, 2004, pp 19

Problema 66

Los habitantes del altiplano cuentan en base 5. Si ellos tuviesen que anotar el número de 305 cabezas de ganado, ¿cómo anotarían tal cifra usando la base 5?

En la base 5 tenemos en cada columna los valores multiplicados por 5. Las cifras que utiliza la base 5 son: 4, 3, 2, 1 y 0. De modo que para anotar 305, tendríamos que comenzar con la columna de 125 unidades y calcular así:

125	25	5	1	V.P.
				305

125	25	5	1	V.P.B_{10}
2	2	1	0_5	2210_5
250	50	5	0	305_{10}

R: Usando la base 5 anotarían 2210_5 cabezas de ganado

Problema 67

Marcelo quiere anotar en base cuatro este número que ha encontrado escrito en base 3: 12021_3. ¿Cómo debería proceder y qué número debe anotar?

Recordemos que en base 3, cada columna multiplica por 3 el valor precedente:

81	27	9	3	1	V.P.B_{10}
1	2	0	2	1	
81	54	0	6	1	142_{10}

Si el número que le corresponde es equivalente a 142_{10}, bastará convertir este número a la base 4, recordando que en la base 4, cada columna multiplica por 4 el valor precedente y por tanto los valores por columna son: 1, 4, 16, 64, etc.. y que sólo podemos usar las cifras 0, 1, 2 y 3:

256	64	16	4	1	V.P.B_{10}
	2	0	3	2_4	
	128	0	12	2	142_{10}

R: Debe convertir el número de base 3 a base 10 y de ésta a la base 4. Debería anotar el número 2032_4.

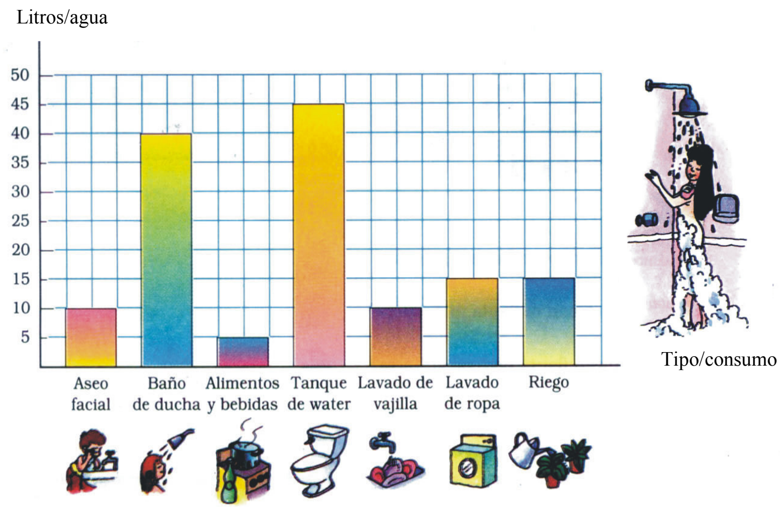
4.7.Los diagramas para procesar la información estadística

4.7.1. **Iniciando el proceso**.

Al inicio se le pide al niño que lea e interprete los datos presentados en el cuadro y que sea capaz de responder preguntas básicas a partir de su lectura. Se analiza un ejemplo como el que presentamos o un ejemplo extraído de los diarios y revistas que el niño de 5º grado sea capaz de interpretar.

Problema 68[13]

1 El diagrama de barras representa los litros de agua que consume una persona diariamente en una ciudad moderna. Determina el consumo de cada tipo y compáralos.



Luego responde:

a) Según el gráfico, ¿cuántos litros de agua consume diariamente cada habitante?

b) ¿Cuánto consumiría diariamente una familia de 6 personas?

c) ¿Y cuántos litros consumirá dicha familia en 30 días?

d) Si por cada 1000 litros paga S/. 2, aproximadamente, ¿cuál es el costo de su consumo mensual?

e) ¿Hay algún tipo de consumo que te sorprende? ¿Por qué?

f) ¿Cuánto más consume una persona tomando un baño de ducha que lavándose las manos y la cara? ¿Cuánto menos lavando la vajilla que la ropa?

g) Si en lugar de tomar un baño de ducha la persona tomara un baño de tina, el consumo por baño sería dos y media veces mayor. ¿A cuánto ascendería?

h) Si en lugar de regar las plantas con baldes o regadera se hiciera con la manguera abierta el consumo de riego sería 8 veces mayor. ¿A cuánto llegaría?

i) ¿Qué sugerirías para evitar el desperdicio de agua?

[13] Ferro, Antonieta. Matemática 4. Ed. IBE Lima, 2004, pp 166

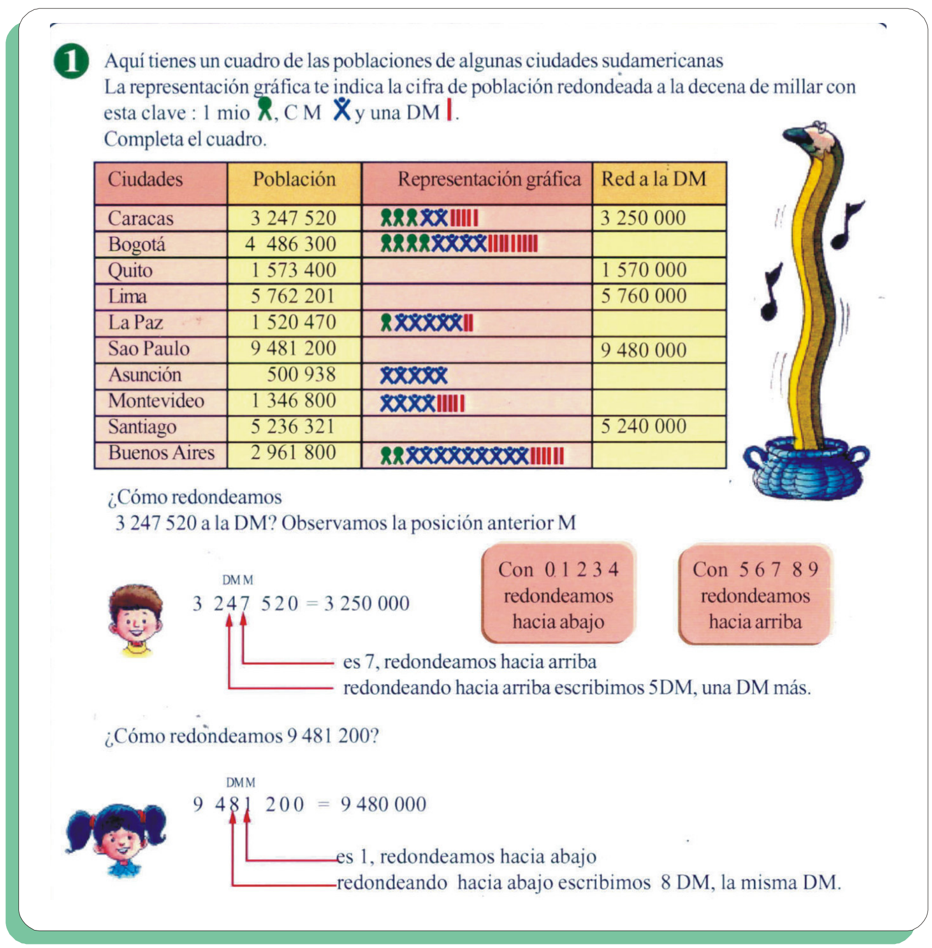
4.7.2. El redondeo con cifras significativas

Después de esta etapa podemos combinar el tema del diagrama de barras con el redondeo de números, pues para representar los números en cuadros gráficos muchas veces es necesario redondear a la centena, millar, decena de millar, etc.

Para el aprendizaje del redondeo recomendamos trabajar con cantidades significativas. Aquí presentamos datos sobre poblaciones de capitales latinoamericanas de la década de 1990.

Problema 69[14]

¿Puedes representar gráficamente y redondear las poblaciones de las capitales sudamericanas indicadas? Te sugerimos recurrir al Internet para actualizar los datos.



1 Aquí tienes un cuadro de las poblaciones de algunas ciudades sudamericanas
La representación gráfica te indica la cifra de población redondeada a la decena de millar con esta clave : 1 mio, C M y una DM.
Completa el cuadro.

Ciudades	Población	Representación gráfica	Red a la DM
Caracas	3 247 520		3 250 000
Bogotá	4 486 300		
Quito	1 573 400		1 570 000
Lima	5 762 201		5 760 000
La Paz	1 520 470		
Sao Paulo	9 481 200		9 480 000
Asunción	500 938		
Montevideo	1 346 800		
Santiago	5 236 321		5 240 000
Buenos Aires	2 961 800		

¿Cómo redondeamos
3 247 520 a la DM? Observamos la posición anterior M

DM M
3 247 520 = 3 250 000

Con 0 1 2 3 4 redondeamos hacia abajo

Con 5 6 7 8 9 redondeamos hacia arriba

es 7, redondeamos hacia arriba
redondeando hacia arriba escribimos 5DM, una DM más.

¿Cómo redondeamos 9 481 200?

DM M
9 481 200 = 9 480 000

es 1, redondeamos hacia abajo
redondeando hacia abajo escribimos 8 DM, la misma DM.

[14] Ferro, Antonieta. Matemática 5. Ed. Eula Lima, 2007, pp 22

4.7.3. Problemas con diagramas de barras

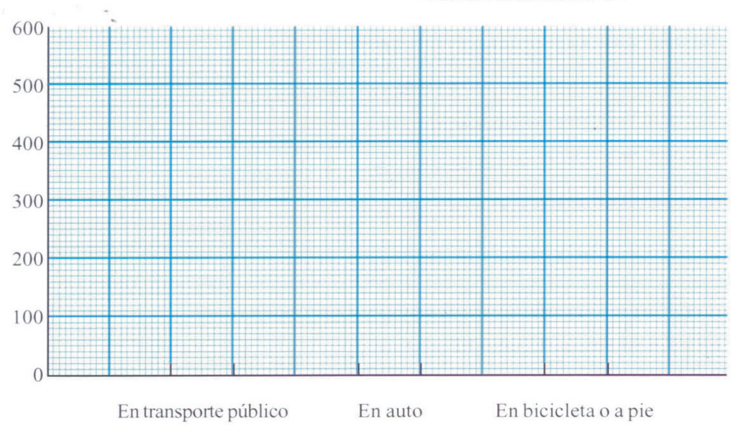
Una vez que los alumnos saben interpretar los diagramas de barras y redondear los números que deben ser representados, llega el momento de pedirles que resuelvan problemas donde tienen que redondear y luego proceder a la representación gráfica.

Aquí presentamos dos problemas con diagramas. Es conveniente buscar información en diarios y revistas y redactar problemas similares de contenido significativo para niños de 5º o 6º grado.

Problema 70[15]

1 Una fábrica de alimentos que cuenta con 1 000 servidores ha investigado cómo acuden sus obreros y empleados al trabajo. Redondea el total a la decena y represéntalo en un gráfico de barras. Cada línea representa una decena..

Medio	Empleados	Obreros	Total	Redondeo a la D.
	226	493		
	195	19		
	18	49		

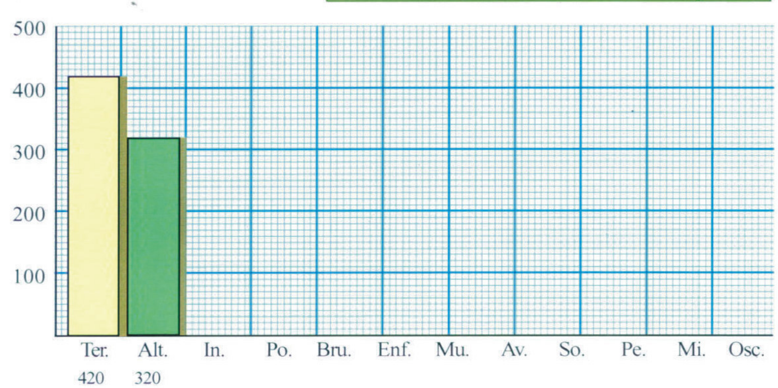


15 Ferro, Antonieta. Matemática 5. Ed. Eula Lima, 2007, pp 24

Problema 71[16]

4 A 2380 personas se les preguntó a qué cosa le tenían miedo. Redondea los resultados a la decena y graficalas juntando las barras.

Encuesta sobre el miedo		Red D
Terrorismo y delincuencia	415	420
Altura	324	320
Insectos	225	
Pobreza	223	
Brujería y daño	217	
Enfermedades	186	
Muerte	185	
Aviones	182	
Soledad	139	
Perros	111	
Micros y combis	95	
Oscuridad	78	



En esta etapa recomendamos el trabajo colaborativo, formando equipos de trabajo compuestos por 6 alumnos con el objetivo de recolectar material de encuestas con temas que ellos consideren significativos.

A partir de esa indagación preliminar, podemos proponer la realización de diversas encuestas a cada grupo. En nuestra experiencia los niños investigaron sobre mascotas preferidas por sus compañeros, programas de televisión que más veían, cantantes y grupos de rock favoritos, deportes que más practicaban y hasta las propinas que recibían con mayor frecuencia.

[16] Ferro, Antonieta. Matemática 4. Ed. Eula Lima, 2007, pp 27

4.7.4. Problemas con tablas de frecuencias y diagramas de doble barra

En toda encuesta es necesario organizar y cuantificar datos y por eso necesitamos usar previamente las tablas de frecuencias y luego el diagrama de doble barra.

Las preguntas nos aseguran la correcta lectura e interpretación de los datos de la tabla y de su representación en el diagrama. Comenzamos con barra simple y seguimos con la doble barra.

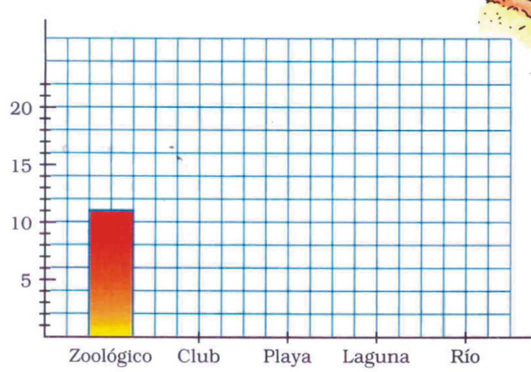
Problema 72[17]

1 La maestra nos llevará de excursión dos veces durante este año. Ella ha decidido hacer una encuesta para elegir los dos lugares a donde iremos.

Observa los resultados de la votación y completa esta TABLA DE FRECUENCIAS:

Lugares	Recuento de votos	Número
Parque zoológico	卌 卌 /	
Club campestre	卌 卌 ////	
Playa	卌 卌 卌 ///	
Laguna	卌 ////	
Río	////	

Representa el resultado de esta encuesta en un DIAGRAMA DE BARRAS y luego responde:



a) ¿Qué lugar resultó preferido?
b) ¿Qué lugar obtuvo la segunda preferencia?
c) ¿A qué lugares no iremos?
d) ¿Cuántos alumnos participaron en la votación teniendo en cuenta que cada uno dio dos votos?
e) Si la moda es el lugar registrado con mayor frecuencia, ¿cuál es la moda en esta tabla?

[17] Ferro, Antonieta. Matemática 4. Ed. IBE Lima, 2004, pp 168

En el problema siguiente tenemos una encuesta que incluye comparación entre dos grupos y por ello, proponemos el uso de dos tablas de frecuencia y del diagrama de doble barra. Igualmente las preguntas encaminan una correcta interpretación de la lectura.

Problema 73[18]

2 Se va a formar la Biblioteca de Aula del 4° grado. Las maestras del 4° A y 4° B deciden hacer una encuesta sobre el tipo de lectura que preferimos.

Completa estas tablas de frecuencias y luego promueve en tu clase una votación semejante:

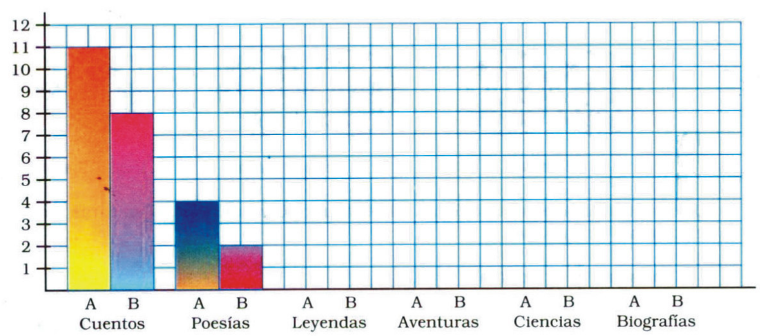
4° A

Tipo de lectura	Votos	Número
Cuentos	𝍸 𝍸 /	●
Poesías	////	●
Leyendas	///	●
Aventuras	●	5
Ciencias y Ecología	●	3
Biografías	●	2

4° B

Tipo de lectura	Votos	Número
Cuentos	𝍸 ///	●
Poesías	●	2
Leyendas	●	1
Aventuras	𝍸 //	●
Ciencias y Ecología	𝍸 ///	●
Biografías	●	2

Ahora vamos a representar esta votación en un GRÁFICO DE DOBLE BARRA. Si ya tienes los resultados de tu salón puedes añadirlos y tener una gráfica de triple barra.



Luego responde:

a) ¿Cuántos alumnos participaron en la encuesta de 4° A y 4° B?

b) ¿Cuántos niños votaron por los cuentos en total? ¿Por qué se dice que los cuentos es la moda?

c) ¿En qué tipo de lectura se dio la diferencia más grande entre ambos salones?

d) ¿Qué tipo de lectura ocupó el segundo lugar de preferencia considerando los votos de ambas clases?

---

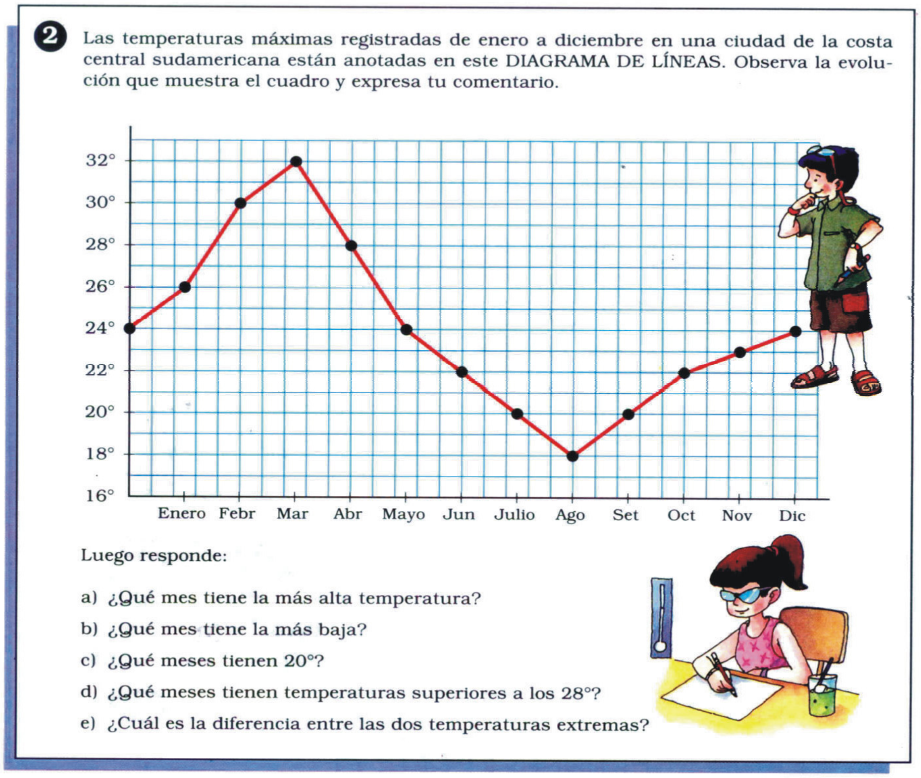
[18] Ferro, Antonieta. Matemática 4. Ed. IBE Lima, 2004, pp 169

4.7.5. Problemas con diagramas de líneas y puntos

Para comparar las temperaturas del medio ambiente nada mejor que un diagrama de líneas y puntos. También es aconsejable emplearlo con las cifras sobre aumento de ventas en el kiosco de la escuela o de la población escolar.

En esta etapa un problema sobre sus calificaciones de matemática durante las últimas 12 semanas, podría ser muy significativo.

Problema 74[19]



2 Las temperaturas máximas registradas de enero a diciembre en una ciudad de la costa central sudamericana están anotadas en este DIAGRAMA DE LÍNEAS. Observa la evolución que muestra el cuadro y expresa tu comentario.

Luego responde:

a) ¿Qué mes tiene la más alta temperatura?

b) ¿Qué mes tiene la más baja?

c) ¿Qué meses tienen 20°?

d) ¿Qué meses tienen temperaturas superiores a los 28°?

e) ¿Cuál es la diferencia entre las dos temperaturas extremas?

Un trabajo interesante que desarrollaron nuestros alumnos utilizando el diagrama de líneas y puntos, tuvo lugar a propósito del Fenómeno del Niño. Durante este fenómeno, la ciudad registró temperaturas máximas que fueron ascendiendo mes a mes, para luego nuevamente regresar a la normalidad.

Investigando en noticias de los diarios, hallaron que en Lima durante noviembre la máxima llegó a 32º, en diciembre ascendió a 28º hasta llegar a los 34º en marzo. Fue muy provechoso para ellos, investigar y luego representar tal noticia en el periódico mural de la escuela , con fotos alusivas a los efectos desastrosos de tales cambios climáticos. Fue una buena oportunidad para vincular matemáticas y ciencias sociales.

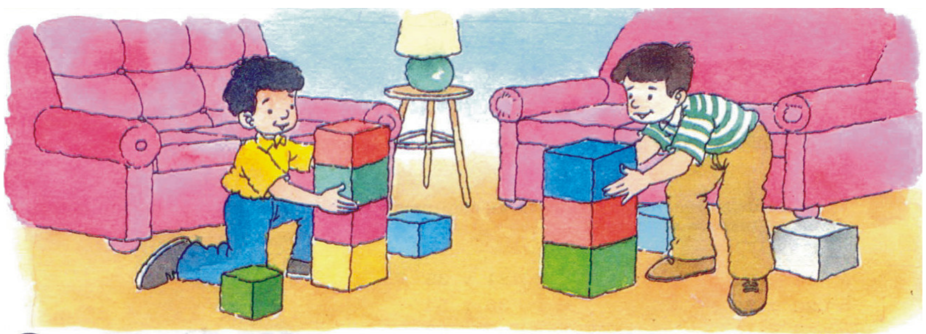
[19] Ferro, Antonieta. Matemática 4. Ed. IBE Lima, 2004, pp 167

4.8. Los diagramas para trabajar con el MCM y MCD

4.8.1. Trabajamos con el MCM

Uno de los conceptos que resulta a los niños más difíciles de entender es el de MCM. Presentamos tal concepto a través de un problema de dos columnas de cubos de diversa altura, 15 y 18 cm, que apilados deben alcanzar una misma altura. Podemos luego esquematizar tal situación con el esquema propuesto e incluso utilizar cajas para ayudar a su comprensión.

Problema 75[20]



1 Daniel y Roberto quieren construir torres de la misma altura utilizando cajas. Daniel tiene solamente cajas de 15 cm y Roberto tiene únicamente cajas de 18 cm de alto.

a) ¿ Cuántos centímetros medirán las torres cuando tengan la misma altura ?
b) ¿ Cuántas cajas habrá colocado entonces cada uno ?

Representa las torres de ambos en tu cuaderno y observarás que mientras la torre de Daniel aumenta de 15 cm, a 30 cm, a 45 cm, etc..., la torre de Roberto aumenta de 18 cm a 36 cm, a 54 cm, etc ... Completa ahora la solución determinando primero los múltiplos comunes y luego el menor de ellos.

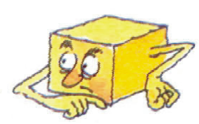
M_{15} = { 15, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ... }

M_{18} = { 18, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ... }

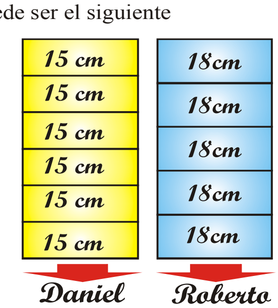
Múltiplos comunes = { ___ , ___ , ... }

Mínimo de los múltiplos comunes o MCM : ___

A esa altura Daniel ha colocado ___ cajas y Roberto ___ .



Un esquema adecuado puede ser el siguiente



[20] Ferro, Antonieta. Matemática 6. Ed. IBE Lima, 2004, pp 42

En este caso se trata de coincidencia en el espacio. Para redondear el desarrollo de este concepto conviene presentar un caso de coincidencia en el tiempo. Para este propósito es adecuado el problema de los buques que salen cada 15, 20 y 24 días, y que coinciden en su salida, cada cierto número de días.

Para ilustrarlo podemos utilizar el diagrama de flechas o también el clásico diagrama de Venn, esta vez relacionando tres conjuntos.

Problema 76[21]

2 Del terminal marítimo salen 3 líneas de buques : La Naviera Pacífico sale cada 20 días, la Naviera Humboldt sale cada 15 días y la Línea Interoceánica cada 24 días.

a) ¿ Cada cuántos días coincide la salida de los buques de las tres compañías ?
b) ¿ Cuántos viajes habrá emprendido cada compañía hasta ese momento ?

N. Pacífico = { , , , , , , , , ... }

N. Humboldt = { , , , , , , , , ... }

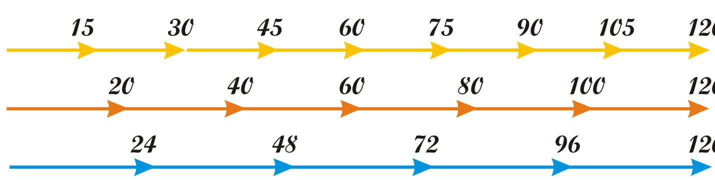
L. Interoceánica = { , , , , , , , , ... }

Múltiplos comunes = { , , ... }

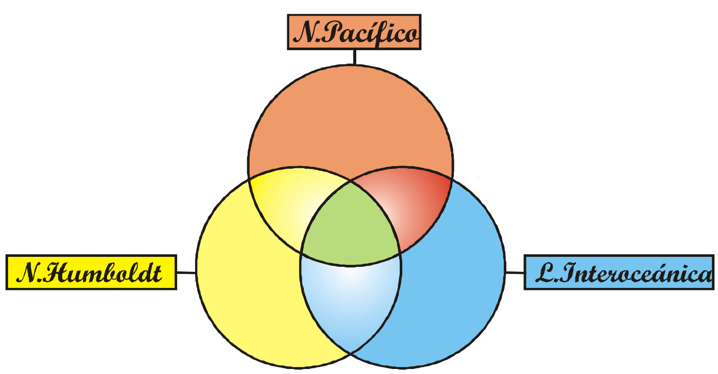
MCM :

La N. Pacífico ha emprendido viajes, la N. Humboldt y la L. Interoceánica .

Un esquema adecuado puede ser



O el clásico diagrama de Venn con 3 conjuntos



[21] Ferro, Antonieta. Matemática 6. Ed. IBE Lima, 2004, pp 42

Para solucionar estos problemas también podemos utilizar el algoritmo, sobre todo en los casos de cifras mayores, que sería difícil manejar por el método de conjuntos.

Problema 77

Tres ciclistas compiten en un circuito cerrado y parten juntos. El primero tarda 48 segundos en dar una vuelta, el segundo tarda 36 segundos y el tercero, 72 segundos. Pasados unos segundos, los tres se vuelven a encontrar. En ese momento, ¿cuántas vueltas le lleva de ventaja el ganador a los otros dos?

Para resolver este problema sugerimos el uso de un algoritmo alternativo, pero naturalmente basado en la descomposición de un número en sus factores primos, teniendo en cuenta que el MCM es igual al producto de todos los factores primos comunes o no comunes con su mayor exponente:

Paso 1
Descomponemos los tres factores con el diagrama de árbol

36	48	75
$4 \cdot 9$	$8 \cdot 6$	$3 \cdot 25$
$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$	$3 \cdot 5 \cdot 5$

Paso 2
Escribimos con potencias la descomposición de cada número y la alineamos en columnas según los factores primos que intervienen:

$36 = 2^2 \cdot 3^2$
$48 = 2^4 \cdot 3$
$7 = 3 \cdot 5^2$

Paso 3
Seleccionamos los factores alineados comunes y no comunes con su mayor exponente porque se trata de obtener un múltiplo que los contenga a todos. Finalmente multiplicamos los factores seleccionados para hallar el MCM

$36 = 2^2 \cdot 3^2$
$48 = 2^4 \cdot 3$
$75 = 3 \cdot 5^2$

MCM= $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 16 \cdot 9 \cdot 25 = 3\,600$

Luego como 3600 : 36 = 100, el primero ha dado 100 vueltas
3600 : 48 = 75, el segundo ha dado 75 vueltas
3600 : 75 = 48, el tercero 48 vueltas
Por último, 100 – 75 = 25 y 100 – 48 = 52

R: Se encontrarían después de 3 600 vueltas y el primero aventajaría por 25 vueltas al segundo y por 52 vueltas al tercero

4.8.2. Trabajamos con el MCD

Del mismo modo la enseñanza del concepto del MCD reviste cierta dificultad. Para facilitarla sugerimos este problema cuya representación puede efectuarse con ayuda del diagrama de Venn.

Previamente los alumnos deben dominar por cálculo mental la determinación de los divisores de un número. De este modo los divisores de 45, han de obtenerse a partir de: 1 x 45, 3 x 15 y 5 x 9; y en forma similar, los divisores de 36 se calcularán a partir de: 1 x 36, 2 x 18, 3 x 12, 4 x 9 y 6 x 6.

Una vez obtenidos los divisores de ambos números, buscamos los divisores comunes y por último, el máximo de los divisores comunes.

Problema 78[22]

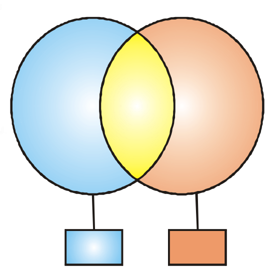
1 En una bodega se prepararon 45 litros de vino blanco y 36 litros de vino tinto. Para ofrecerlos en venta es necesario envasarlos en botellones de igual tamaño, que tengan todos la máxima capacidad posible, sin que sobre ni falte vino y, sin mezclar los dos tipos de vino. ¿ Cuántos litros deberá contener cada botellón ?
Como puedes comprender debemos decidir si el vino se puede envasar en botellones de 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... litros. Para ello, vamos a buscar los divisores de 45 y de 36, luego buscaremos los divisores comunes y por último el mayor de los divisores comunes.

$D_{45} = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$

$D_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

Divisores comunes = { , , }

Máximo de los divisores comunes :



[22] Ferro, Antonieta. Matemática 6. Ed. IBE Lima, 2004, pp 40

Un problema donde intervienen 3 divisores y además se pregunta por el número de unidades resultantes en cada caso, es el siguiente:

Problema 79[23]

2 Un almacén está preparando canastas navideñas. Dispone de 30 panetones, 48 latas de conserva y 12 botellas de champán para confeccionar las canastas. Se prepararán de tal manera que todas tengan el mismo número de cada tipo de producto, sin que sobre ni falte ninguno.

a) ¿ Cuál es el mayor número de canastas que se puede obtener ?

b) ¿ Cuántos panetones, cuántas latas de conserva y cuántas bebidas tendrá cada canasta ?

D_{30} = { , , , , , , , }

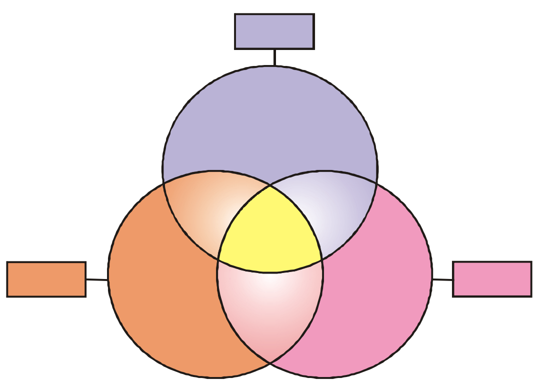
D_{48} = { , , , , , , , , , }

D_{12} = { , , , , , }

Divisores comunes = { , , , }

Máximo de los divisores comunes :

Cada canasta tendrá panetones, latas de conserva y bebidas.



[23] Ferro, Antonieta. Matemática 6. Ed. IBE Lima, 2004, pp 40

Para problemas con números mayores es igualmente recomendable el algoritmo, teniendo en cuenta que al seleccionar los factores de las columnas resultantes, el MCD es el producto solamente de los factores primos comunes con su menor exponente.

Problema 80[24]

8 Don Pancho quiere sembrar con eucaliptos todo el perímetro de su terreno de modo tal que los árboles resulten a la misma distancia y que se plante un eucalipto en cada esquina de su terreno cuadrangular.

¿Cuál es la máxima distancia a la que pueden colocarse los árboles y cuántos se necesitarán ?

a) 12 m y 54 árboles.

b) 6 m y 109 árboles.

c) 30 m y 9 árboles.

d) 109 m y 6 árboles.

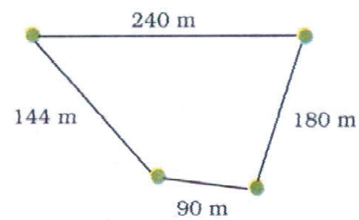
$240 = 2^4 . 3 . 5$

$144 = 2^4 . 3^2$

$180 = 2^2 . 3^2 . 5$

$90 = 2 . 3^2 . 5$

$MCD = 2 . 3 = 6$



$240 + 144 + 180 + 90 = 654$

$654 : 6 = 109$

Por último, un problema que ayuda a redondear este concepto en la mente de los alumnos es el clásico de los tres listones de madera.

Problema 81

7 Toribio, el carpintero, tiene 3 listones de madera de 90 cm, 150 cm y 180 cm, y quiere cortar piezas iguales del máximo tamaño posible aprovechando toda la madera.
¿ Cuántos centímetros de largo medirá cada pieza ?

a) 10 cm

b) 15 cm

c) 30 cm

d) 5 cm

$90 = 2 . 3^2 . 5$

$150 = 2 . 3 . 5^2$

$180 = 2^2 . 3^2 . 5$

$MCD = 2 . 3 . 5 = 30$

[24] Ferro, Antonieta. Matemática 6. Ed. IBE Lima, 2004, pp 45

4.9. Los esquemas para trabajar con operadores fraccionarios

En 3º y 4º grado los alumnos han aprendido a reconocer la fracción de una unidad y a representarla gráficamente usando rectángulos o círculos, así como también a reconocer el numerador y el denominador de una fracción. También se han iniciado en el concepto de equivalencia de fracciones, especialmente a través de gráficos.

4.9.1. Buscamos la salida de la máquina

Pero en 5º grado es importante que reconozcan la fracción de un conjunto de n elementos, especialmente utilizando medidas de longitud, peso, capacidad, dinero y tiempo. Así, han de saber determinar los ¾ de 20 litros, los 2/3 de una hora expresados en minutos o los 4/5 de 1 km expresados en metros.

En un primer momento han de reconocer la fracción de una cantidad con la ayuda de un gráfico, empezando con ejercicios que propongan 1 como numerador. Veamos un ejemplo adecuado.

Problema 82[25]

1 En la orquesta escolar tocan 15 niños.

$\frac{1}{3}$ de los niños son violinistas y son niños

$\frac{1}{5}$ de los niños son trompetistas y son niños

$\frac{2}{5}$ de los niños son flautistas y son niños

$\frac{3}{5}$ de los niños tocan instrumentos de viento y son niños

$\frac{1}{15}$ de los niños son percusionistas y es niño

[25] Ferro, Antonieta. Matemática 4. Ed. IBE Lima, 2004, pp 94

En segunda instancia pasamos a los ejercicios de cálculo mental, calculando un cuarto de una cantidad para luego calcular 3 cuartos y un tercio para luego determinar 2 tercios. Las siguientes tablas pueden ser una estrategia adecuada para el 5º grado:

2 a)

Un cuarto de	24	40	80	160	200	280
es	6					

Multiplicando los resultados anteriores por 3 tenemos que :

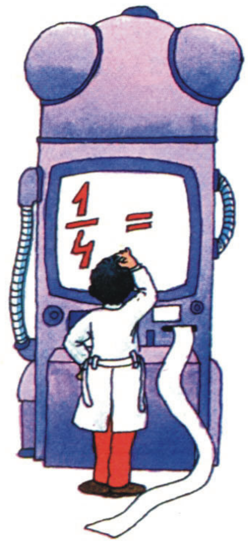
tres cuartos de	24	40	80	160	200	280
son	18					

b)

Un tercio de	24	48	60	75	90	120
es	8					

Multiplicando los resultados anteriores por 2 tenemos que :

Dos tercios de	24	48	60	75	90	120
son	16					



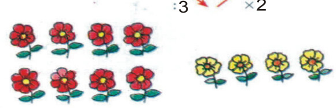
Con estos ejercicios están listos para utilizar las máquinas con operadores fraccionarios y buscar en primer lugar la salida. Así, si la entrada es 12 y el operador ordena hallar los 2/3, divido 12:3 para hallar un tercio que es 4 y luego multiplico 4 x 2 para hallar los 2/3. Veamos como funcionan las máquinas con operadores fraccionarios.

Problemas 83-84[26]

4 Halla usando los operadores:

a) $\frac{2}{3}$ de 12 flores son rojas y son

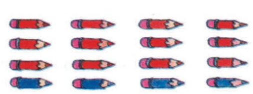
$12 \xrightarrow{:3} \frac{2}{3} \xrightarrow{\times 2} \boxed{8}$



b) $\frac{3}{4}$ de 12 botellas son de naranjada y son

$12 \xrightarrow{:} \frac{3}{4} \xrightarrow{\times}$

c) $\frac{3}{4}$ de 16 lápices son rojos y son



d) $\frac{3}{5}$ de 10 animales son ratones y son

5 Halla calculando mentalmente con operadores:

a) $\frac{2}{3}$ de 15 cm son

b) $\frac{3}{4}$ de 60 min son

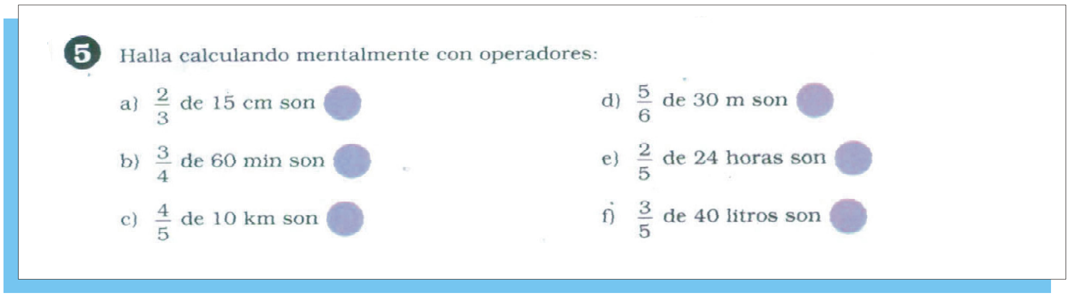
c) $\frac{4}{5}$ de 10 km son

d) $\frac{5}{6}$ de 30 m son

e) $\frac{2}{5}$ de 24 horas son

f) $\frac{3}{5}$ de 40 litros son

[26] Ferro, Antonieta. Matemática 4. Ed. IBE Lima, 2004, pp 95



5 Halla calculando mentalmente con operadores:

a) $\frac{2}{3}$ de 15 cm son

b) $\frac{3}{4}$ de 60 min son

c) $\frac{4}{5}$ de 10 km son

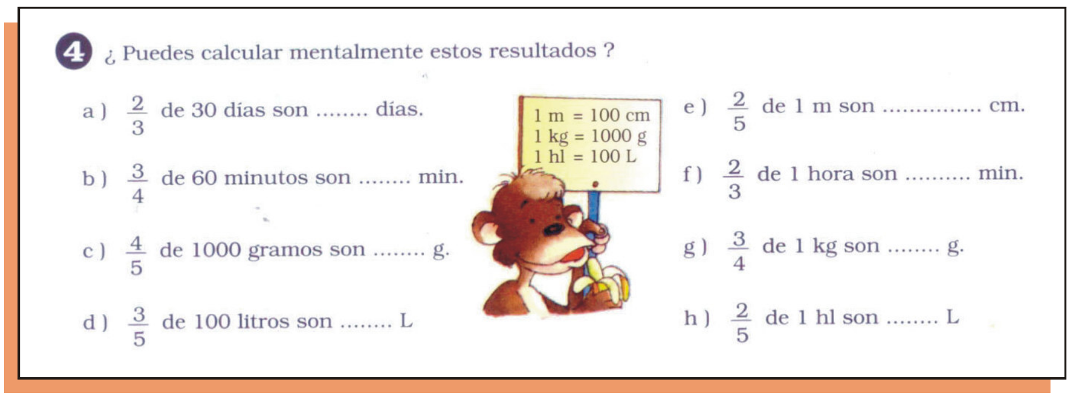
d) $\frac{5}{6}$ de 30 m son

e) $\frac{2}{5}$ de 24 horas son

f) $\frac{3}{5}$ de 40 litros son

Como se habrá observado una buena estrategia es iniciar el tema con problemas gráficos para luego continuar con problemas breves de cálculo mental. Para consolidar esta etapa, es importante el uso de medidas tales como el metro, el kilómetro y la hora.

Problema 85[27]



4 ¿ Puedes calcular mentalmente estos resultados ?

a) $\frac{2}{3}$ de 30 días son .... días.

b) $\frac{3}{4}$ de 60 minutos son .... min.

c) $\frac{4}{5}$ de 1000 gramos son .... g.

d) $\frac{3}{5}$ de 100 litros son L

e) $\frac{2}{5}$ de 1 m son .... cm.

f) $\frac{2}{3}$ de 1 hora son .... min.

g) $\frac{3}{4}$ de 1 kg son .... g.

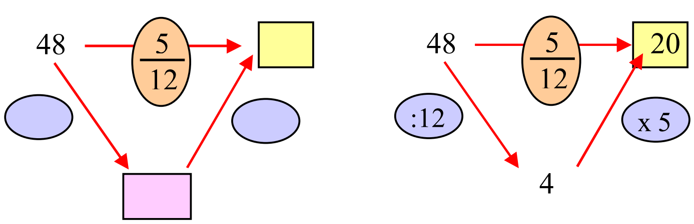
h) $\frac{2}{5}$ de 1 hl son L

Para culminar esta etapa conviene proponer problemas de textos diversos donde se requiera hallar la salida de una máquina con un operador fraccionario.

Problema 86

La clase de 5º A cuenta con 48 alumnos, de los cuales 5/12 son varones y los otros 7/12 son mujeres. ¿Cuántos varones y cuántas mujeres hay en la clase?

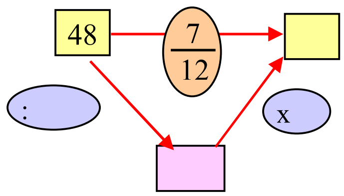
En este caso aplicamos la búsqueda del operador y luego restamos porque se trata de dos conjuntos complementarios:

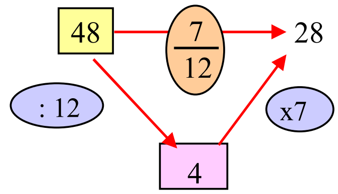


48 – 20 = 28

[27] Ferro, Antonieta. Matemática 5. Ed. IBE Lima, 2004, pp 111

Algunos niños pueden haber buscado los 7/12 de 48. Si queremos podemos comprobar que efectivamente esta es la otra vía de solución:





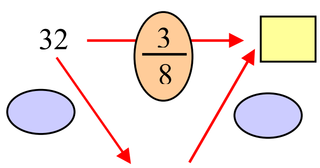
48 - 28 = 20

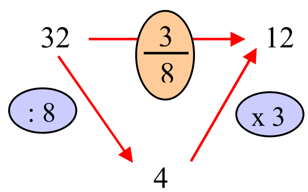
R: En 5º A hay 20 varones y 28 mujeres.

En esta misma línea, un problema que toca contenidos relativos a las ciencias naturales es el siguiente:

Problema 87

Si tenemos 32 dientes, 3/8 de ellos son molares, 1/4 son premolares. 1/8 son caninos y el resto son incisivos. ¿Cuántos dientes de cada clase tenemos?





Luego mentalmente:
¼ de 32 es 8
1/8 de 32 es 4

Luego hallamos el complemento:

$12 + 8 + 4 + \square = 32$

$24 + \square = 32$

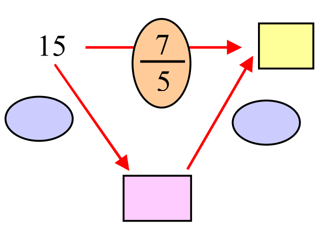
$\square = 8$

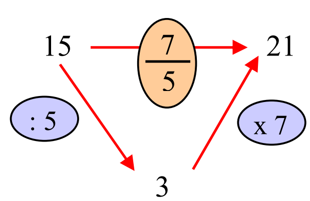
R: Tenemos 12 molares, 8 pre-molares, 4 caninos y 8 incisivos.

Trabajar con fracciones impropias también es posible, por ejemplo para el caso de los sobreprecios.

Problema 88

Durante el verano acostumbraba a comprar 3 kg de uva por \$ 15. Pero durante el invierno tengo que pagar los 7/5 de dicho precio. ¿Cuánto pagaría por 3 kg en invierno? ¿Y cuánto más me costaría cada kilogramo?





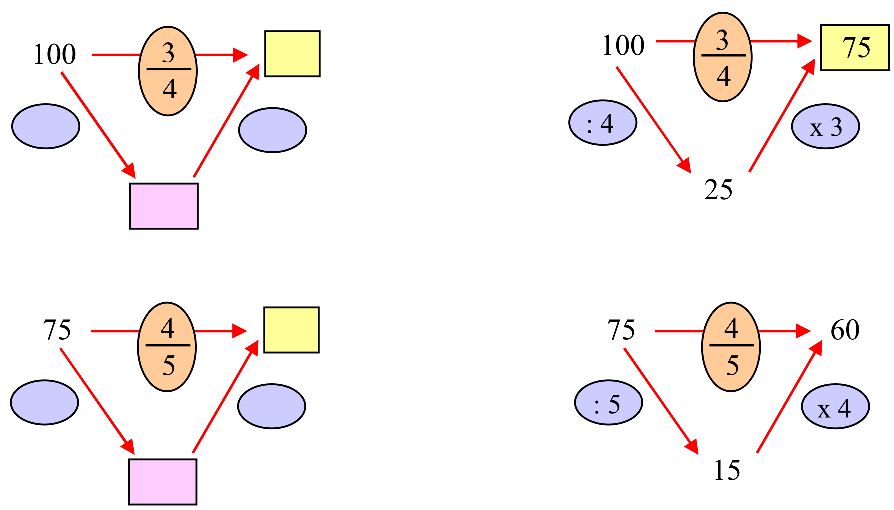
21 : 3 = 7
15 : 3 = 5
7 – 5 = 2

R: En invierno pagaría S/. 21 por los 3 kg y cada kilogramo me costaría S/. 2 más.
También puede darse una doble aplicación en la búsqueda de la fracción de una cantidad como en este problema sobre consumo de alimentos:

Problema 89

Pepe consume diariamente ¾ de 1 litro de leche mientras que Susi, su hermana, consume 4/5 de lo que consume Pepe. ¿Cuántos centilitros consume cada uno?

Sabiendo que 1 L = 100 cl tenemos:



R: Pepe consume diariamente 75 cl de leche y su hermana 60 cl.

También podemos plantear una doble búsqueda de cantidades consumidas y precios como en este problema de compras:

Problema 90

Los Suárez y los Fernández compran un saco de arroz de 184 kg. Los Suárez toman los 5/8 y los Fernández el resto. El precio del saco es de $ 552 y cada familia paga de acuerdo a su consumo. ¿Cuántos kilos toma cada familia? ¿Cuánto pagará cada una?

En este caso, podemos hallar la fracción de las cantidades de una forma más breve:

5/8 de 184 kg son 115 kg
184 – 115 = 69 kg
5/8 de S/. 552 son S/. 345
552 – 345 = S/. 207
R: Los Suárez toman 115 kg y pagan S/. 345, los Fernández toman 69 kg y pagan S/. 207.

Finalmente tenemos un problema complejo, con un tema que vincula la matemática a las ciencias del medio ambiente y la ecología. Formalmente es necesario obtener la fracción de 4 diversas cantidades y luego tener una adecuada comprensión de lectura para aplicar adecuadamente los cálculos de multiplicación, adición y sustracción de números naturales, que son necesarios para solucionar este problema.

Problema 91[28]

7 En el álbum de ECOLOGÍA encontramos noticias sobre 60 parejas de parihuanas que habitan en una laguna.
Se dice que en la época de reproducción ha ocurrido lo siguiente :

$\frac{1}{5}$ de las hembras han tenido una cría

$\frac{1}{4}$ de ellas han tenido dos crías

$\frac{1}{3}$ han tenido 3 crías

$\frac{2}{10}$ han tenido hasta 4 crías.

a) ¿ Cuántas crías han nacido ?
b) ¿ Cuántas parihuanas son ahora en total ?
c) ¿ Cuántas hembras no han tenido cría ?
d) ¿ Qué grupo ha tenido el mayor número de crías ?

1/5 de 60 hembras son 12 y como cada hembra tiene 1 cría, tenemos 1 x 12 = 12 crías
¼ de 60 son 15 y como cada una tiene 2 crías, tenemos 15 x 2 = 30 crías
1/3 de 60 son 20 y como cada una tiene 3 crías, tenemos 20 x 3 = 60 crías
2/10 de 60 son 12 y como cada una tiene 4 crías, tenemos 12 x 4 = 48 crías

Por lo tanto, sumando los totales parciales, habrán nacido:
12 + 30 + 60 + 48 = 150 crías

Serán en total, contando 60 machos y 60 hembras:
60 machos + 60 hembras + 150 crías = 270 parihuanas

Para saber las que no han tenido crías restamos de 60, las que han tenido crías:
60 – 12 – 15 – 20 – 12 = 1

El tercer grupo que ha tenido 3 crías y 60 en total, es el que ha tenido mayor número puesto que: 60 > 48 > 30 > 12

R: Han nacido 150 crías y ahora son 270 parihuanas en total. Sabemos que una hembra no ha tenido ninguna cría y el grupo con mayor número de crías es el que ha tenido 3 crías por cada hembra.

[28] Ferro, Antonieta. Matemática 6. Ed. IBE Lima, 2004, pp 69

4.9.2. Buscamos la entrada de la máquina

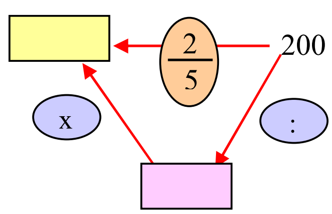
Si bien los alumnos de 5º grado hallan con facilidad problemas que requieren la salida de la máquina, los de 6º grado pueden hallar problemas que requieren la entrada de la máquina mediante el uso de la operación contraria.

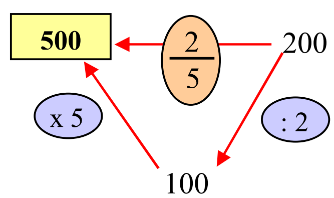
Esto nos amplía el número y la variedad de problemas que podemos resolver, pues a cada uno de los problemas anteriores corresponde por reversibilidad, el correspondiente problema que busca el término inicial.

Problema 92

Se han construido 200 km de una carretera, que son los 2/5 del total que debe realizarse. ¿Cuántos kilómetros de longitud tendrá la carretera?

2/5 de □ son 200



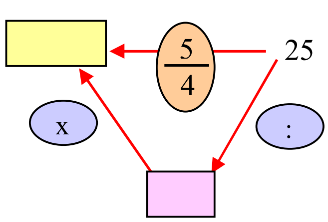


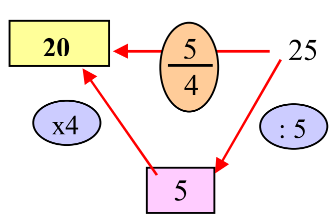
R: La carretera tendrá una longitud de 500 km

Un texto con el asunto del sobreprecio, algo más complejo que el problema sobre este tema ya presentado, lo tenemos en este caso, que pregunta por el precio normal, dado que se pagó un sobreprecio.

Problema 93

Si por un diccionario de inglés me cobraron $ 25 que son los 5/4 de su precio normal, ¿cuál es su precio normal y cuánto pagué de sobreprecio?





25 – 20 = 5

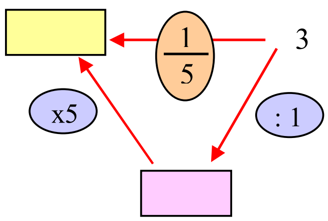
R: Pagué S/. 5 de sobreprecio.

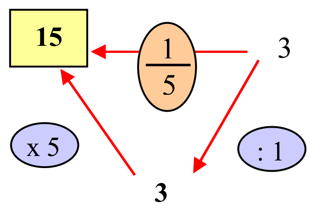
Algunas veces los problemas de este tipo son más sencillos pero la forma de redactarlos influye en su nivel de dificultad.

Problema 94

El entrenador de un equipo de fútbol dice orgullosamente: “Sólo hemos perdido una quinta parte de los partidos jugados hasta ahora. Estas tres derrotas son fácilmente recuperables”
¿Cuántos partidos fútbol se jugaron hasta ahora?

Se trata de encontrar el total de partidos sabiendo que 1/5 de ellos son 3





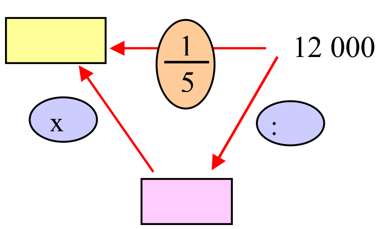
R: Se jugaron hasta el momento 15 partidos.

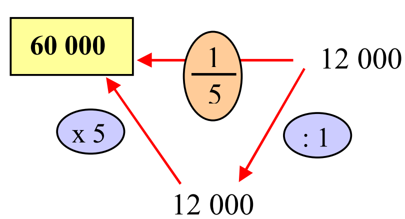
Un problema que requiere una elaboración previa y posterior a la determinación de la entrada es el siguiente:

Problema 95

Pedro compró una casa y en la firma del contrato entregó 1/5 del total, y más tarde cuando se la entregaron 3/5 más. El resto que son solamente \$ 12 000, se ha comprometido a pagarlo en cuotas mensuales de \$ 600.
¿Qué fracción de la casa pagó? ¿Qué fracción le falta pagar? ¿Cuál es el precio total de la casa? ¿En cuántos meses pagará su deuda?

Tengamos en cuenta que pagó 1/5 + 3/5 = 4/5
Si pago 4/5 entonces le falta pagar 1 – 4/5 = 1/5
Ahora sabemos que 1/5 es equivalente a \$ 12 000 y podemos buscar la entrada:





Por último nos pide el número de cuotas mensuales que será:
12 000 : 600 = 20 meses = 1 a 8 m

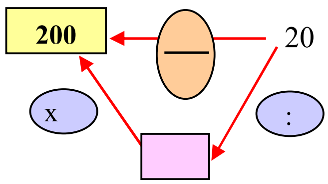
R: Pagó 4/5 del precio y le falta pagar 1/5. El precio total de la casa es de \$ 60 000 y debe terminarla de pagar en un año y ocho meses.

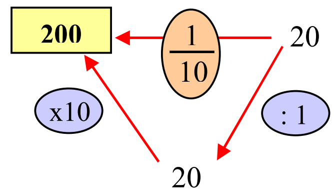
4.9.3. Buscamos la orden de la máquina

Finalmente, en 6º grado podemos proponer problemas que impliquen determinar el operador, dando la entrada y la salida. Podemos preguntar, por ejemplo, qué fracción son 3 rosas de una docena de rosas o 25 lápices de un ciento de lápices.

Problema 96

Si se han pavimentado 20 m de una pista de 200 m, ¿qué fracción se ha pavimentado?

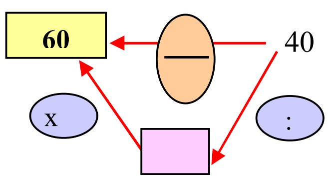


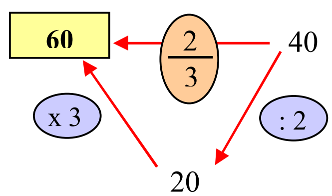


R: Se ha pavimentado 1/10 de la pista.

Problema 97

Si han transcurrido 40 minutos de una función que dura 1 hora. ¿Qué fracción falta para que termine la función?





3/3 – 2/3 = 1/3

R: Falta 1/3 del tiempo para que termine la función.

Una alternativa para no usar los operadores es escribir la fracción que resulta de usar la parte como el numerador y la base como denominador.

Problema 98

En una clase hay 60 alumnos, 15 niñas y 45 niños. ¿Qué fracción de niños y qué fracción de niñas hay?

De este modo tenemos como parte el numerador, que es el número de cada grupo y como total, el denominador que es la base o total de los participantes.

Parte $\longrightarrow$ 15 niñas
Total $\longrightarrow$ 60 alumnos

$$\frac{15 \text{ niñas}}{60 \text{ alumnos}} = \frac{1}{4} \qquad \frac{45 \text{ niños}}{60 \text{ alumnos}} = \frac{3}{4}$$

R: Las niñas son ¼ del total y los niños los ¾ .

Aquí tenemos un problema sencillo pero que contiene un dato supernumerario que dificulta su solución:

Problema 99

Presionando un tubo de Dentil que contiene 80 ml de pasta dental, obtenemos una tira de 2 m de largo. Si en cada cepillada utilizamos una tira de 15 mm, ¿qué fracción de tira utilizamos en cada cepillada?

En este caso no es necesario utilizar el dato sobre el contenido del tubo sino solamente comparar los 15 mm con el total de largo de la tira que es de 2 m, es decir 2 000 mm

$$\begin{array}{l} \text{Parte} \longrightarrow \\ \text{Total} \longrightarrow \end{array} \frac{15}{2000} = \frac{3}{400}$$

R: En cada cepillada utilizamos los 3/400 de la tira de pasta del tubo.

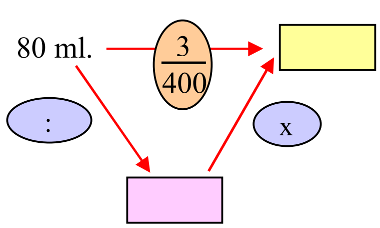
Ahora planteemos un problema similar pero utilizando todos los datos mencionados:

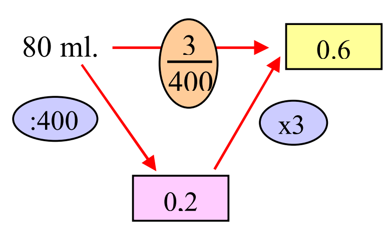
Problema 100

Presionando un tubo de Dentil que contiene 80 ml de pasta dental, obtenemos una tira de 2 m de largo. Si en cada cepillado utilizamos una tira de 15 mm, ¿qué cantidad de pasta utilizamos en cada cepillada?

Calculamos primero la fracción del tubo como en el caso anterior.

Una vez que obtenemos los 3/400, calculamos esta fracción del total de pasta que es de 80 ml





De modo que 3/400 de 80 ml es 0,6 ml de pasta

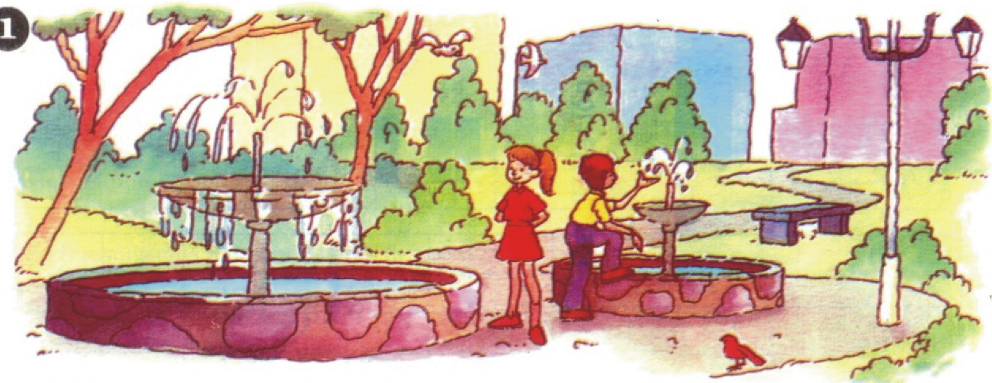
R: En cada cepillada consumimos 6/10 de ml de pasta dental.

Cuando el alumno aprende a discriminar cuando buscar la salida, la entrada o la orden del operador, adquiere un buen manejo de los problemas con operadores fraccionarios.

4.10 Las tablas y diagramas para trabajar la proporcionalidad y el porcentaje

Iniciamos este tema a partir del concepto de razón geométrica, entendida como un par de números que indican un determinado cociente. Para explicarla podemos presentar el caso de la fuente y el número de litros que arroja por minuto. Luego pasamos a la escritura de otras razones, que puedan dar al niño una idea más amplia del concepto.

1



La fuente de la plaza arroja 20 litros en 5 minutos.
Una pileta lateral arroja solamente 18 litros en 6 minutos.
Estas relaciones se pueden escribir como razones :

$$\frac{20\ \text{L}}{5\ \text{min}}\ ,\ \frac{18\ \text{L}}{6\ \text{min}}$$

Se llama **razón** a un par de números que indica un determinado cociente entre dos cantidades.

Escribe como razones las siguientes relaciones :

a) 10 galones de gasolina cuestan S/. 62.
b) Un auto recorre 180 km en 2 horas.
c) La luz viaja 300 000 km en 1 segundo.
d) En 100 ml de sangre hay 55 ml de plasma.
e) Con 40 L de leche se fabrican 10 kg de crema.

4.10.1. La estrategia de la tabla de proporciones y la correspondencia directa

Determinado el concepto de razón, establecemos el concepto de proporción como la igualdad de dos o más razones. Para mostrar el aspecto más básico del concepto de proporciones, podemos plantear en primer lugar un problema con números naturales y resolverlo utilizando la estrategia de la tabla de proporciones.

Problema 101[29]

Si una fuente de la plaza arroja 20 L en 5 minutos, ¿en cuántos minutos arrojará 40 L, 60L, 80L y 100 L?

[29] Ferro, Antonieta. Matemática 6. Ed. IBE Lima, 2004, pp 154

Para resolver este problema utilizando la tabla de proporciones aplicamos el concepto de correspondencia directa entre dos magnitudes, por el cual al doble, al triple, al cuádruple, etc. de la primera magnitud, que es el antecedente, le corresponden el doble, el triple, el cuádruple, etc …de la segunda magnitud, que es el consecuente. En este primer caso utilizamos la multiplicación, aunque también es posible relacionar la suma de los antecedentes con la suma de los consecuentes.

x3
x2

Litros	20	40	60	80	100
Minutos	5	10	15		

x2
x3

Veamos ahora el caso en que a la mitad, a la tercia, a la cuarta, etc… de la primera magnitud, que es el antecedente le corresponden la mitad, la tercia, la cuarta, etc… de la segunda magnitud, que es el consecuente. En el siguiente problema presentamos éste, que utiliza división y el caso anterior, que requiere de la multiplicación.

Problema 102

Si una pileta arroja 24 L en 8 minutos, ¿cuántos minutos tardará en arrojar 3 L, 12 L, 18 L y 36 L?

x6
:8
:2

Litros	3	12	18	24	36
Minutos	1	4	6	8	

:2
:8
x6

R: Tardará 1, 4, 6 y 12 minutos respectivamente.

El siguiente paso consiste en plantear problemas con números decimales utilizando la multiplicación.

Problema 103

Si 1 kg de manzanas cuesta $ 1,50, determina el precio de 3 kg, 4 kg y 5 kg de manzanas.

3 Vamos a resolver estos problemas usando la TABLA DE PROPORCIONES. Si 1 kg de manzanas cuesta S/. 1,50, calcula el precio de 2, 3, 4, y 5 kg.

Peso	1 kg	2 kg	3 kg	4 kg	5 kg
Precio	S/. 1,50				

Observa que cada una de las razones de esta proporción se puede encontrar multiplicando el peso y el precio por el mismo número.

Y luego presentamos un problema con números decimales en casos que requieren tanto multiplicación como división. Para una respuesta adecuada es necesario determinar los precios aplicando el concepto de redondeo al centésimo más cercano.

Problema 104[30]

Si 4 galones de gasolina de 97 octanos cuestan $ 64,20, ¿cuánto costarían 1, 3, 3,5 y 4,5 galones?

Galones	1	3	3,5	4	4,5
Precio				64,20	

En esta etapa, es importante que los alumnos analicen con algunos ejemplos, cuáles de las correspondencias son proporciones directas y las razones por las cuales algunas no los son. Veamos algunos casos:

a) Cantidad de hojas de papel del mismo grosor y altura del bloque conformado
b) Edad y talla de una persona cada año
c) Tiempo de regar el jardín y consumo de agua
d) Distancia recorrida en el bus y precio del pasaje
e) Cantidad de dólares y cantidad de soles que le corresponde
f) Peso del paquete en el correo y precio del importe que le corresponde

[30] Ferro, Antonieta. Matemática 5. Ed. IBE Lima, 2004, pp 163

4.10.2. Resolvemos una proporción directa aplicando regla de tres.

En casos, en que se presenta una proporción de dos razones iguales, es útil abreviar el procedimiento utilizando la regla de tres, como en este problema que relaciona volumen y altura de un cilindro.

Problema 105[31]

Un recipiente tiene la forma de un cilindro de 80 cm de altura. Si lo llenamos con 18 dm^3 de agua, el líquido alcanza 21,6 cm de altura. ¿Qué altura alcanzará el agua al llenarlo con 24 dm^3 ?

Volumen en dm^3 → $\frac{18}{21,6} = \frac{24}{x}$
Altura en cm →

Sabemos que en toda proporción los términos como **24** y **21,6,** antecedente de la segunda proporción y consecuente de la primera proporción, se llaman **medios** y los términos como **18** y la incógnita **x**, antecedente de la primera proporción y consecuente de la segunda, se denominan extremos. Además para que dos razones sean equivalentes, se requiere que el producto de sus extremos sea igual al producto de sus medios.

De modo que:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{si sólo si} \quad b \cdot c = a \cdot d$$

Aplicando la regla de la igualdad del producto de los medios y extremos, tenemos:

$18 \cdot x = 21,6 \cdot 24$ y luego dividiendo ambos términos entre 18, tenemos la regla de 3:

$$x = \frac{21,6 \cdot 24}{18}$$

$x = 28,8$ cm

R: El agua alcanzará una altura de 28,8 cm

Un problema que relaciona la correspondencia entre el peso expresado en kilogramos y los litros de sangre de una persona, es el siguiente:

---

[31] Ferro, Antonieta. Matemática 6. Ed. IBE Lima, 2004, pp 156

Problema 106

Por cada kilogramo de peso una persona saludable debería tener 0,09 L de sangre. ¿Cuántos litros de sangre necesita recibir una persona de 60 kg de peso que sólo tiene 4 L de sangre, para alcanzar su estado ideal?

Peso en kg $\longrightarrow$
Sangre en L $\longrightarrow$ $\dfrac{1}{0{,}09} = \dfrac{60}{x}$

$1 \cdot x = 60 \cdot 0{,}009$
$x = 5{,}4$

Descontando los que ya tiene, el resto equivale a:

$5{,}4 - 4 = 1{,}4$

Este problema también puede resolverse por una operación combinada:

$(60 \cdot 0{,}09) - 4 =$

$5{,}4 - 4 = 1{,}4$ L

R: Necesitaría recibir 1,4 L de sangre.

Otro problema de tema similar, relaciona la correspondencia entre la cantidad de plasma expresada en ml y la de sangre expresada en ml y luego requerida en L.

Problema 107

Para obtener 100 ml de plasma se necesita 180 ml de sangre. ¿Cuántos litros de sangre se necesita para atender un paciente que requiere 1,5 L de plasma?

Si 1,5 L = 1500 ml, entonces:

Plasma en ml $\longrightarrow$
Sangre en ml $\longrightarrow$ $\dfrac{100}{180} = \dfrac{1500}{x}$

$100 \cdot x = 180 \cdot 1500$

$x = \dfrac{180 \cdot 1500}{100}$

$x = 2\,700$

Del mismo modo 2 700 ml = 2,7 L

R: Para obtener 1,5 L de plasma, se necesita 2,7 L de sangre.

4.10.3. Representación gráfica de una proporción directa

Sabemos que toda serie de razones iguales que forman una proporción directa puede ser representada por un segmento en una semirrecta en el primer cuadrante cartesiano, cuyo punto inicial es el cero.
Para ilustrar esta representación podemos valernos de este problema que relaciona el número de kw/h consumidos con el precio por cada kilowatio por hora.

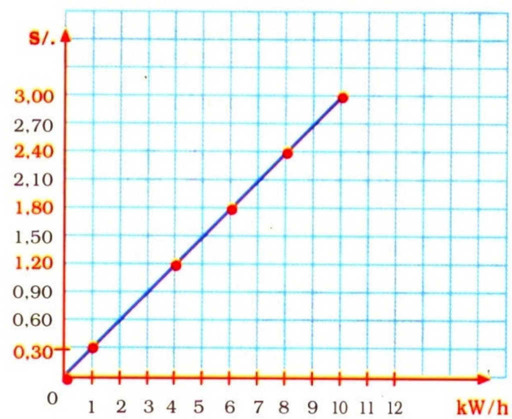
Problema 108[32]

Si el consumo de 4 kw/h cuesta $ 1,20. ¿Cuánto costará el consumo de 1, 6, 8 y 10 kw/h?

: 0,30

Consumo kW/h	1	4	6	8	10
Precio S/.		1,20			

x 0,30



Los puntos marcados con rojo (1;0,30) (4; 1,20) etc…son los representantes de un proporción directa.
Todos ellos pertenecen a un segmento de la misma semirrecta marca en azul, que tiene **su punto inicial en 0.**
En cada representación cartesiana partimos de un **factor de proporcionalidad** que aquí es 0,30 porque a 1kw/h le corresponde $0,30 a 2kw/h $ 0,60, etc…

Un problema similar establece la relación entre el volumen de agua consumido expresado en m^3 y el precio del agua pagado por cada metro cúbico.

Problema 109

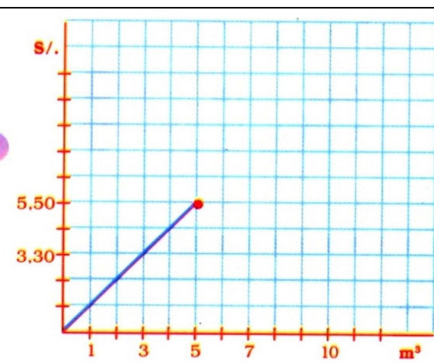
El consumo de 5 m^3 de agua potable cuesta $ 5,50. Determina el precio de 3, 7 y 10 m^3 y completa la tabla de proporciones y el diagrama cartesiano.

: 5

Consumo m^3	1	3	5	7	10
Precio S/.			5,50		

a) Marca los 5 puntos representantes de esta proporcionalidad directa :

b) ¿ Cuál es el factor de proporcionalidad en esta correspondencia ?



[32] Ferro, Antonieta. Matemática 6. Ed. IBE Lima, 2004, pp 157

4.10.4. La importancia de determinar el factor de proporcionalidad

Por último, conviene enfrentar al alumno a problemas que aunque establecen una correspondencia entre dos magnitudes, se trata de una correspondencia no proporcional que carece de un factor de proporcionalidad directa. Conviene mostrar estas correspondencias no proporcionales con la finalidad que el estudiante tome conciencia que en la vida real, existen muchas correspondencias entre magnitudes que no están en proporción directa ni inversa.

Problema 110[33]

La mamá de Nico ha medido la estatura de su hijo cada año el mismo día de su cumpleaños. Lo ha hecho desde que nació hasta los 9 años. Observa la tabla y determina si se trata o no, de una proporción directa y fundamenta tu respuesta.

Edad (años)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Talla (cm)	52	72	86	94	102	108	114	120	125	130

Es también interesante trabajar casos de proporciones que contienen términos racionales positivos en su expresión fraccionaria, pues si bien los alumnos resuelven con relativa facilidad los casos con decimales, tienen mayor dificultad cuando se trata de cálculos con fracciones.

Problema 111

Para comprar zapatos a sus hijos, la mamá de Perico y Lucía pidió una tabla de equivalencias entre el número de calzado y los centímetros de su longitud. Comprueba que se trata de una proporcionalidad directa hallando el factor de proporcionalidad.

Número	23	24	25	26	27	28	29	30
Largo en cm	$15\frac{1}{3}$	16	$16\frac{2}{3}$	$17\frac{1}{3}$	18	$18\frac{2}{3}$	$19\frac{1}{3}$	20

x 1,5

Dividiendo 30 : 20 hallamos que el factor de proporcionalidad es 1,5 y que por lo tanto cada número de calzado representa 1,5 cm de largo del zapato.

[33] Ferro, Antonieta. Matemática 6. Ed. IBE Lima, 2004, pp 166

4.10.5. La proporcionalidad inversa

Una correspondencia entre dos magnitudes se llama inversa si al doble, al triple, al cuádruple, la mitad, etc. de la primera magnitud, que es el antecedente, corresponde la mitad, la tercera parte, la cuarta parte, el doble, etc…de la segunda magnitud, que es el consecuente.

Para ilustrar la explicación de la proporcionalidad inversa podemos plantear el siguiente problema que relaciona la correspondencia entre el número de niños y el número de días que les duran las raciones de alimentos.

Problema 112

Un grupo de scouts planea una caminata de varios días. Si participasen 10 niños los víveres les alcanzarían para 48 días. Si participasen 20 niños es evidente que los alimentos les alcanzarían solamente para 24 días. Sigue calculando para cuantos días les alcanzarían si participaran 1, 3, 5, 6, 15, 30, 48 y 60 niños. Tengamos en cuenta que las raciones diarias serían iguales en todos los casos, para todos los participantes.

Completa la tabla:

Nº de niños	1	3	5	6	10	15	20	30	48	60
Nº de días					48		24			
Total de raciones					**480**					

a) ¿Qué relación se establece de 10 a 20? ¿Y qué relación tenemos de 48 a 24?
b) ¿Qué observas respecto al número de raciones de víveres en cada caso?

Para resolver este problema tenemos que pensar que si el número de raciones es fijo, más niños acuden al paseo, menos días durarán las raciones de alimento que se han llevado. De modo que si 10 niños consumen las raciones en 48 días tenemos 480 raciones, que 20 niños consumirán en 24 días, pues 480 : 20 = 24 y 30 niños las consumirán en 16, puesto que 480 : 30 = 16.

Así se ha establecido una relación inversamente proporcional que puede interpretarse con el siguiente diagrama

x3 x4 x2

Nº de niños	1	3	5	6	10	15	20	30	48	60
Nªde días	480	160	96	80	48	32	24	16	10	8

:2 :4 :3

R: Entre 10 y 20 se establece una relación de un número a su doble mientras que de 48 a 24 se establece una relación de un número a su mitad. Lo mismo sucede con la relación entre los demás pares. Respecto al número de raciones de víveres se observa que se trata de una cantidad que no varía y es constante, y en este caso es de 480 raciones.

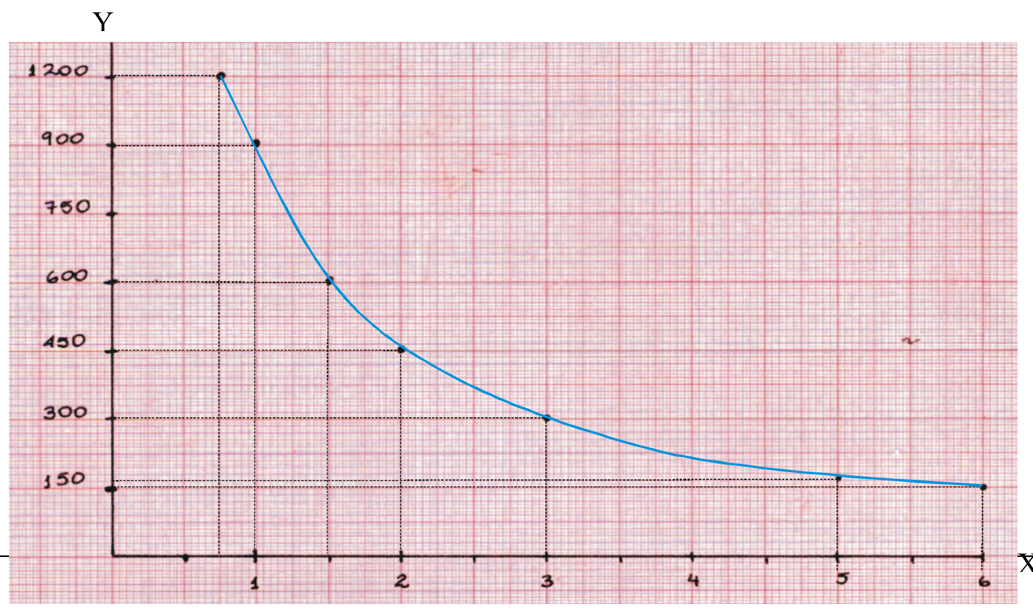
4.10.6. La representación gráfica en la proporcionalidad inversa

Completemos el cuadro con la relación inversa:

Problema 113[34]

Un tanque de agua mineral se envasa en 1 200 botellas de 0.75 L. Esta misma cantidad de agua se quiere envasar en botellas de ½ L y 1 L, en botellones de 1,5 L y 2 L y en damajuanas de 3, 4 y 6 L cada una. Completa la tabla y el gráfico

Nº de botellas		1200						
Contenido de cada una en L	0.5	0,75	1	1,5	2	3	5	6
Total de litros		**900**						



:2 x2

Contenido de cada bot en L	x	0.5	0,75	1	1,5	2	3	5	6
Número de botellas	y	1800	1200	900	600	450	300	180	150

x2 : 2

Advertimos que al hacer la representación gráfica en los ejes coordenados, los pares de valores (x,y) representan en X, el contenido en litros y en Y, el número de botellas. Al trazar los 8 pares empezando por (0,5/1800), (0,75/ 1200) (1/900), etc, observamos que la curva que se forma nunca llega a cortar o tocar alguno de los ejes de las coordenadas.

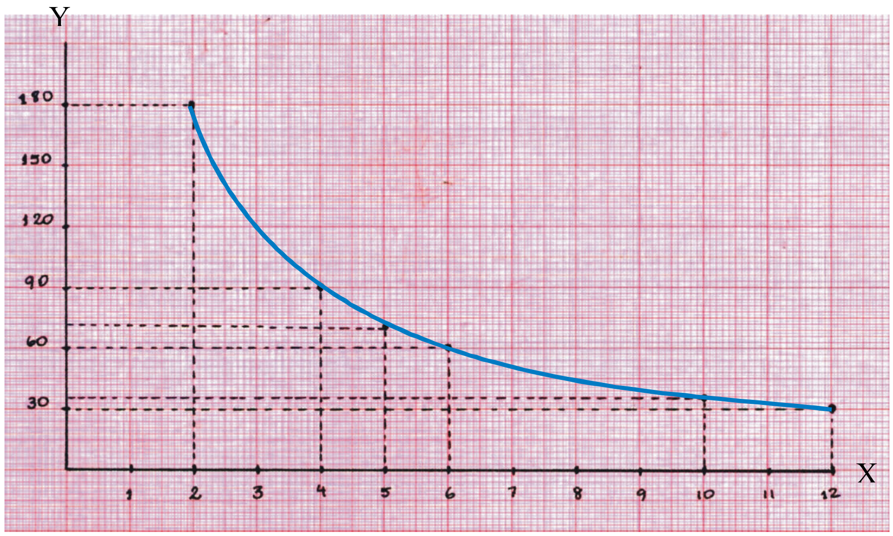
[34] Ferro, Antonieta. Matemática 6. Ed. Eula Lima, 2007 (En prensa)

El ejemplo analizado es fácilmente intuible. Sin embargo con unidades de trabajo por día este tipo de problema se torna más complejo.

Problema 114[35]

Seis excavadoras pueden abrir un túnel en 60 días. ¿Cuántos días necesitarán 2, 4, 5, 8, 10 y 12 excavadoras del mismo tipo para abrir un túnel semejante? Completa el cuadro y diseña el gráfico.

Excavadoras	1	2	4	5	6	10	12
Nº de días por excavadora					60		
Días de trabajo de 1 exc					360		



Si 6 excavadoras trabajan durante 60 días, el trabajo de una excavadora equivaldría a 360 días, y por lo tanto el trabajo de 2, a la mitad que es 180, el trabajo de 4, a la cuarta parte que es 90, etc…

:2 :3

Excavadoras	x	1	2	4	5	6	10	12
Nº de días por excavadora	y	360	180	90	72	60	36	30

x 2 x 3

Días de trabajo de 1 exc	--	360	360	360	360	360	360	360

En todos los casos la unidad de 360 que consideramos, es la de trabajo diario por una excavadora. Como vemos en todos los casos se trata de 360 unidades que es una constante de la que vamos a tratar.

[35] Ferro, Antonieta. Matemática 6. Ed. Eula Lima, 2007 (En prensa)

4.10.7. La constante en la proporcionalidad inversa

Como hemos observado en una proporcionalidad inversa el producto de los dos valores "x" e "y", siempre es una constante. Veamos como podemos interpretarla.

Problema 115

Un tonel de vino se envasa en 10 botellas de 8 litros en cada una. Si la misma cantidad del tonel se envasara en 16 botellas, ¿cuántos litros debería contener cada botella?

Magnitud a: número de botellas	10	16
Magnitud b: litros de cada botella	8	x
Producto: litros del tonel en total		

La magnitud a por la magnitud b es igual a la constante 80. Basados en esta propiedad tenemos un método para hallar el valor de x, considerando que a y b son los valores conocidos correspondientes a la primera y segunda magnitud, c es el término conocido de la primera magnitud y x es el término desconocido de la segunda magnitud. De modo que:

$x \cdot c = a \cdot b$ y por lo tanto: $x = \dfrac{a \cdot b}{c}$

$x \cdot 16 = 10 \cdot 8$ y por lo tanto $x = \dfrac{10 \cdot 80}{16} = 5$

R **:** Si el tonel de vino se envasara en 16 botellas cada una debería contener 5 litros

Analicemos este problema por la propiedad de la constante de la proporcionalidad inversa.

Problema 116

El depósito lleno de una estación de servicio dura 5 días vendiendo diariamente 1600 litros. ¿Cuántos días duraría vendiendo 2000 litros diarios?

Analicemos los datos en la tabla**:**

Magnitud I: número de días	5	**x**
Magnitud II: litros de venta diaria	1600	2000
Producto: litros del total		

$\mathbf{x} = \dfrac{5 \cdot 1600}{2000} = \dfrac{8000}{2000} = 4$

R: Los 2 000 litros durarían 4 días.

Aquí tenemos un problema derivado de una situación de la vida real que requiere el uso de números mayores, lo que en cierta forma dificultad el proceso.

Problema 117[36]

El chocolate más grande del mundo fue elaborado en Torino en el año 2 000. Se repartió entre 45 600 personas y le tocó 50 g a cada una. Si se hubiese repartido entre 9 120 personas, ¿cuántos gramos hubiese recibido cada una?
Plantea la proporción inversa y resuelve.

Cuando los números son mayores el uso de la calculadora puede ser opcional:

Magnitud I: número de personas	45 600	9120
Magnitud II: g por persona	50 g	x
Producto: gramos en total		

$$x = \frac{45\,600 \cdot 50}{9\,120} = \frac{2\,280\,000}{9\,120} = 250 \text{ g}$$

R: Si se hubiese repartido entre 9 120 personas, cada una hubiese recibido 250 g

Otro factor que puede dificultar el proceso, puede ser la inclusión de algunas condiciones que modifican la estructura usual del problema.

Problema 118

Doce escavadoras pueden abrir una zanja en 100 días. Pasados 20 días hay que retirar 4 escavadoras. ¿Cuántos días necesitan las escavadoras restantes para terminar el trabajo?

Pasados 20 días, 12 excavadoras harían el trabajo restante en 100 – 20 = 80 días.

Magnitud I: número de excavadoras	12	8
Magnitud II: número de días	80	x
Producto:	960	960

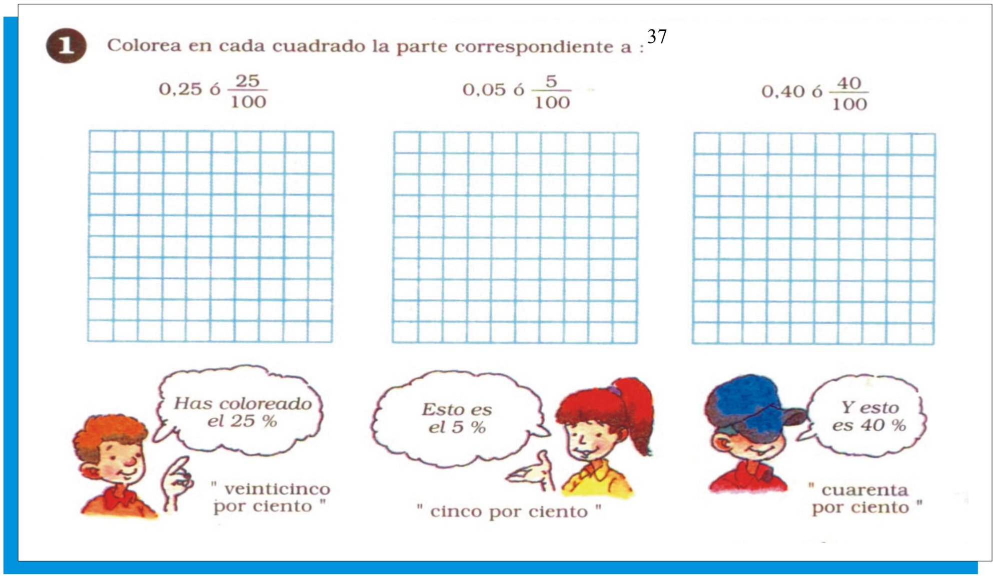
$$X = \frac{12 \cdot 80}{8} = 120 \text{ d}$$

R: Las excavadoras restantes necesitan 120 días para terminar el trabajo pues falta un trabajo que equivale a 960 días por excavadora y dividiéndolo entre 8 nos dan los 120 días.

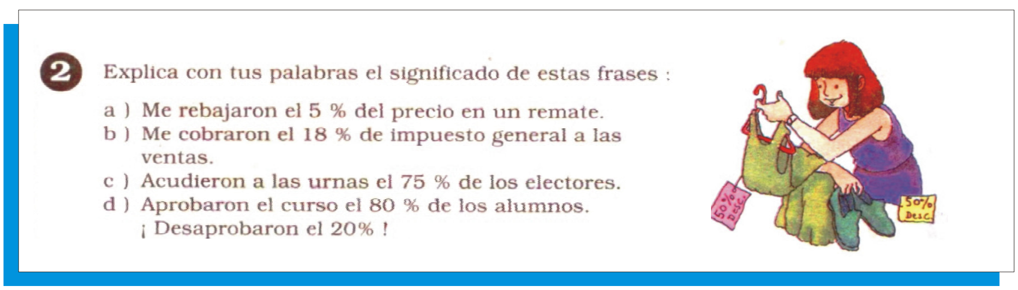
[36] Ferro, Antonieta. Matemática 6. Ed. Eula Lima, 2007 (En prensa)

4.10.8. El concepto de porcentaje y las formas de hallarlo

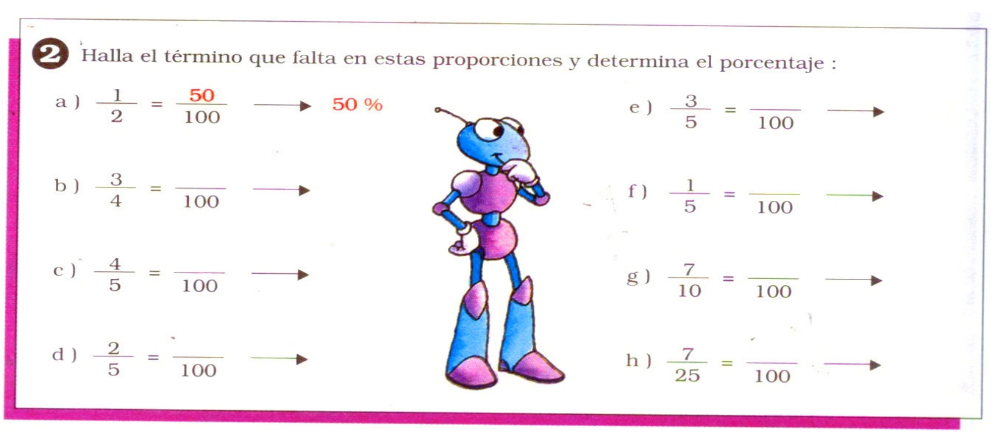
Para iniciar a los alumnos en la noción de porcentaje conviene que coloreen la parte de un cuadrado de 10 x 10 correspondiente a determinados porcentajes.



Luego también es importante la verbalización y por ello los alumnos deben explicar con sus palabras el significado del porcentaje con ejemplos de la vida cotidiana.

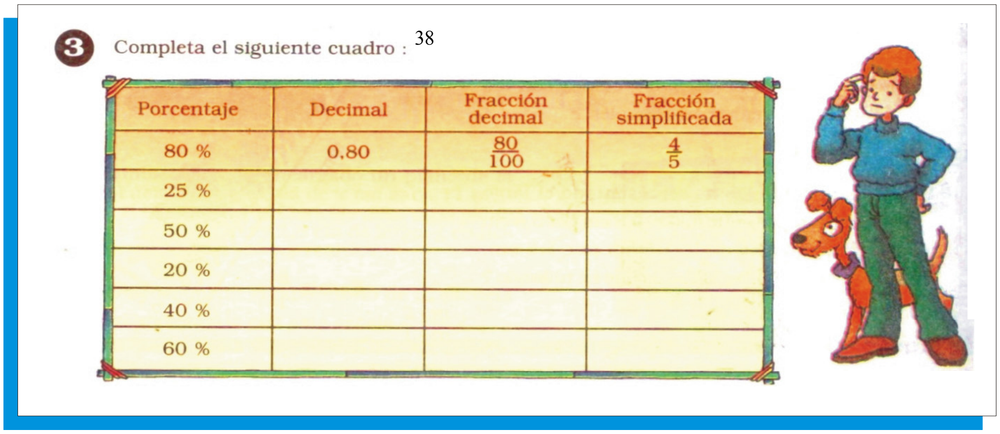


Usando la amplificación los alumnos pueden mostrar las fracciones en porcentaje como en los siguientes ejemplos:



[37] Ferro, Antonieta. Matemática 6. Ed. IBE Lima, 2004, pp 160

Un aspecto muy importante es que aprendan a relacionar finalmente la escritura del número en porcentaje con el número decimal, la fracción decimal y la fracción irreductible.



3 Completa el siguiente cuadro :[38]

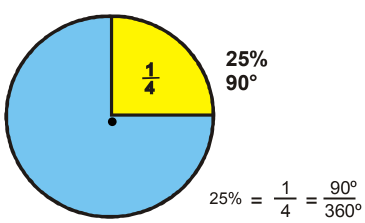
Porcentaje	Decimal	Fracción decimal	Fracción simplificada
80 %	0.80	$\frac{80}{100}$	$\frac{4}{5}$
25 %			
50 %			
20 %			
40 %			
60 %			

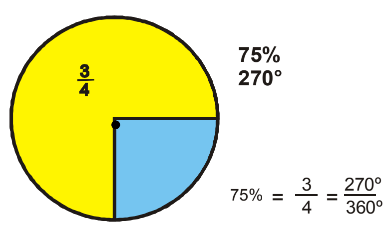
Los porcentajes pueden ser asociados con preferencia a mitades, cuartos y octavos. Pero también a quintos y a décimos.

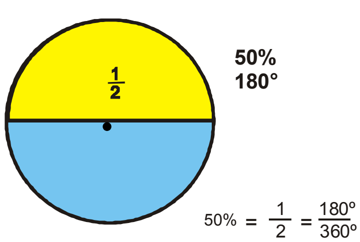
Mitades	Cuartos	Octavos
		$\frac{1}{8}$ = 12,5%
	$\frac{1}{4}$ = 25%	$\frac{2}{8}$ = 25%
		$\frac{3}{8}$ = 37,5%
$\frac{1}{2}$ = 50%	$\frac{2}{4}$ = 50%	$\frac{4}{8}$ = 50%

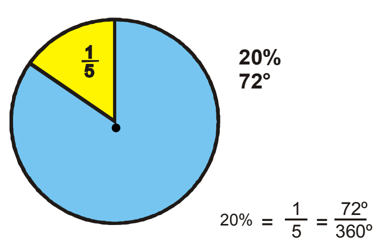
Quintos	Décimos
$\frac{1}{5}$ = 20%	$\frac{1}{10}$ = 10%
$\frac{2}{5}$ = 40%	$\frac{4}{10}$ = 40%
$\frac{3}{5}$ = 60%	$\frac{6}{10}$ = 60%
$\frac{4}{5}$ = 80%	$\frac{8}{10}$ = 80%

También pueden ser asociados a los grados de una circunferencia:









[38] Ferro, Antonieta. Matemática 6. Ed. IBE Lima, 2004, pp 160

4.10.9. Formas de hallar el porcentaje de una base determinada

a) El porcentaje mediante fracciones

Escribimos el porcentaje como la fracción simplificada y hallamos la fracción del número base dado.

> **Problema 119**[39]
>
> Sara compra un blue jean de $ 60 con el 25% de descuento. ¿Cuánto debe pagar?

$$25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

¼ de 60 es 15, por tanto 60 – 15 = 45

R: Pagará $ 45

Otra opción es considerar el pago y no el descuento

Pagará 100% - 25% = 75%

$$75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

¾ de 60 son $ 45

b) El porcentaje mediante proporciones

Escribimos la proporción, que en este caso es directa, considerando en el numerador, la parte y en el denominador, el todo.

> **Problema 120**
>
> El boleto del pasaje Lima-Miami me costaba $ 600 sin incluir IGV. Si tuve que pagar el 19% por el IGV, ¿cuánto pagué por el pasaje en total?

$$\begin{array}{l} \text{Parte} \longrightarrow \\ \text{Todo} \longrightarrow \end{array} \frac{100}{119} = \frac{600}{x}$$

$$X = \frac{119 \cdot 600}{100} = 714$$

R: El pasaje costará $ 714

[39] Ferro, Antonieta. Matemática 6. Ed. IBE Lima, 2004, pp 161

c) El porcentaje mediante decimales.

Este método es ideal para usarse con calculadora. Para aplicarlo se obtiene la fracción decimal convertida a decimal de la cantidad requerida.

Problema 121[40]

Las abejas consumen para su propia alimentación el 55% de la miel que producen y el resto para nuestro consumo. Si un panal produjo 48 kg de miel, ¿qué cantidad de miel produjo para nuestro consumo?

El porcentaje de miel para nuestro consumo sería 100% - 55% = 45 %

45% = 0,45

0,45 de 48 = 0,45 · 48 = 21,6 kg o 21 kg 600 g

R: Produjo 21 kg 600 g para nuestro consumo.

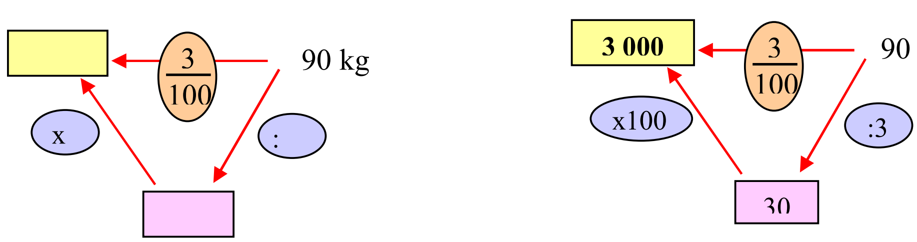
4.10.10. La búsqueda de la base del porcentaje.

Así como hemos buscado el porcentaje de la base, es posible igualmente, buscar la base del porcentaje mediante la operación inversa.

a) Buscando la base mediante fracciones

Problema 122

Un elefante recién nacido pesa aproximadamente 90 kg. Esto representa más o menos el 3% del peso de un elefante adulto. ¿Cuánto pesaría un elefante adulto?



R: Un elefante adulto pesaría 3 000 kg

[40] Ferro, Antonieta. Matemática 6. Ed. IBE Lima, 2004, pp 162

b) Buscando la base mediante proporciones:

Del mismo modo, podemos buscar la base escribiendo la proporción, que también es directa. Sólo que en este caso, la incógnita será colocada en el lugar correspondiente al todo y no a la parte.

Problema 123

La Sra. Rodríguez compró una lavadora con una rebaja del 30% que fueron S/. 240. Calcula el precio normal de la lavadora sin el descuento y la cantidad que pagó.

$$\begin{array}{l} \text{Parte} \longrightarrow \\ \text{Todo} \longrightarrow \end{array} \frac{30}{100} = \frac{240}{x}$$

$$x = \frac{100 \cdot 240}{30} = 800 \qquad 800 - 240 = 560$$

R: La lavadora costaba S/. 800 y por tanto pagó S/. 560.

c) Buscando la base mediante decimales

Cuando las cifras involucradas pasan los 4 dígitos es conveniente usar decimales y opcionalmente la calculadora.

Problema 124

Un complejo agro-industrial tiene un pedido de 2 500 kg de azúcar de remolacha. Si un kilogramo de remolacha contiene 16% de azúcar, ¿cuántas toneladas de remolacha necesita para producir el pedido?

En este tipo de casos, podemos plantear la ecuación y permitir opcionalmente el uso de la calculadora, pues en la vida real es así como solucionamos problemas de porcentaje. Pero si los alumnos aún están aprendiendo el proceso de la división de decimales, es mejor que dividan para consolidar su aprendizaje.

$x \cdot 0{,}16 = 2\ 500$
$x = 2\ 500 : 0{,}16 = 15\ 625$

15 625 kg = 15,625 t = 15 t 625

R: Para producir 2 500 kg de azúcar, el complejo agro-industrial necesita 15,625 t de remolacha.

4.10.11. Buscando la tasa del porcentaje

Hemos buscado el porcentaje de un número base según una tasa, hemos buscado la base, dado el porcentaje y la tasa y ahora vamos a presentar problemas para hallar la tasa, dado el porcentaje y la base.

a) La tasa mediante simplificación y conversión a porcentaje.

Comparamos la relación entre el porcentaje y la base, escribiendo el porcentaje como numerador y la base como denominador y luego simplificamos y convertimos a porcentaje mediante división de decimales.

> **Problema 125**
>
> En un colegio hay 480 alumnos de los cuales 250 son varones. ¿Qué porcentaje de los niños son varones?

Numerador $\rightarrow$ / Denominador $\rightarrow$ $\dfrac{250}{480} = \dfrac{25}{48}$

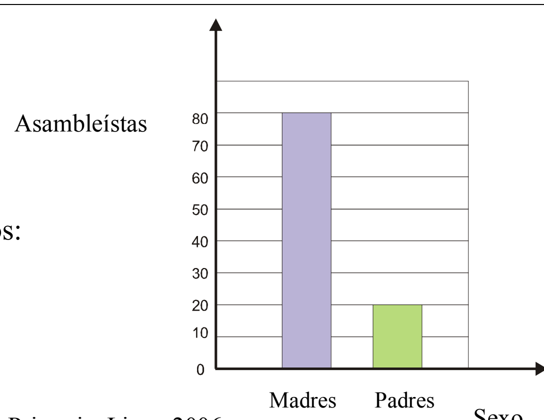
Para la conversión podemos usar la amplificación a fracción decimal y si no es aplicable, la división de decimales:

$$\frac{25}{48} = 0{,}520833 = 0{,}52 = 52\%$$

R: El 52% de los alumnos son varones.

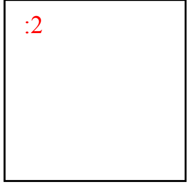
b) La tasa mediante operadores fraccionarios:

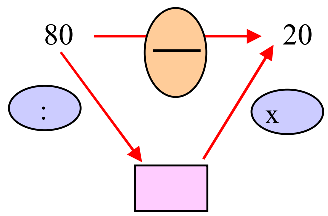
> **Problema 126**[41]
>
> El siguiente cuadro muestra la asistencia a una asamblea de padres de familia. ¿Qué porcentaje representa el número de padres respecto del número de madres?

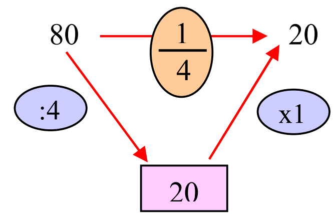


De acuerdo a los datos del cuadro tenemos:
Padres: 20
Madres: 80

[41] Minedu. Evaluación Nacional para Docentes de Primaria, Lima, 2006.







$$\frac{1}{4} \underset{\text{x } 25}{\overset{\text{x } 25}{=}} \frac{25}{100} = 25\%$$

R: El porcentaje de varones es el 25%

c) Buscando la tasa y otros datos mediante proporciones

Problema 127

En un evento académico se encuentran 60 hombres y 90 mujeres. En un momento, se retiró un grupo de mujeres, por lo que el porcentaje de hombres aumentó en 20%. ¿Cuántas mujeres se retiraron?

Sabemos que el total son: 60 hombres + 90 mujeres = 150 personas.

Calculamos con proporciones el porcentaje de hombres

$$\begin{array}{l} \text{Parte} \longrightarrow \\ \text{Todo} \longrightarrow \end{array} \frac{60}{150} = \frac{x}{100}$$

$$x = \frac{60 \text{ x } 100}{150} = \frac{600}{15} = 40$$

El porcentaje de hombres es 40%

Pero este porcentaje sube en 20% , por tanto 40% + 20% = 60%

Si hay 60 varones que son el 60% ¿cuál debe ser ahora el total de personas?

$$\frac{60}{100} = \frac{60}{x}$$

$$x = 100$$

Si ahora hay 100 personas entonces: 100 personas – 60 varones = 40 mujeres
Si ahora hay 40 mujeres, entonces: 90 – 40 = 50 se retiraron

R: Se retiraron 50 mujeres.

Capítulo V
Presentación de los significados en los campos conceptuales seleccionados

En el capítulo anterior hemos presentado algunas herramientas de nuestro programa de estrategias didácticas para la resolución de problemas. Estas estrategias, surgidas en la práctica escolar, nos han servido como instrumentos didácticos para lograr que los alumnos se representen mentalmente una situación problémica que no les era fácil abordar. En el capítulo IV nos limitamos a presentar algunos modelos de estrategias pues esta muestra se complementa con las estrategias desarrolladas en este capítulo, donde las utilizamos para la resolución de los problemas en los campos que presentamos.

Por lo tanto en este capítulo presentamos los esquemas de representación más generales y amplios que abarcan los diversos significados de las operaciones en los campos conceptuales aditivo y multiplicativo, complementando, si fuese necesario, la presentación de los significados con los esquemas de solución correspondientes.

El resto de los campos conceptuales, necesarios para un manejo adecuado del currículo de 5º y 6º grado se desarrolla en forma detallada en el fólder de trabajo del estudiante, puesto que hubiera sido demasiado extenso incluir su tratado en este capítulo.

Así, para este capítulo tenemos dos temas:

5.1. Los significados y esquemas en el campo aditivo
5.2. Los significados y esquemas en el campo multiplicativo

5.1. Los significados y esquemas en el campo aditivo

En el campo aditivo comprendemos los problemas tanto de adición como de sustracción, o dicho de otro modo, aquellos que pueden traducirse de modo que el signo principal o de mayor jerarquía sea de adición o sustracción.

Con el propósito de ilustrar la gama de significados de uso en el ámbito escolar de 5º y 6º grado, vamos a señalar diversos tipos que nos ayudarán a presentar los problemas del campo aditivo en forma más completa y atendiendo a su diversidad.

Para hacer este trabajo hemos consultado el trabajo del investigador español Carlos Maza Gómez sobre “Estructura de los problemas de suma y resta”[1], el estudio sobre “El problema”, de Mónica Pena, especialista en Didáctica de la matemática, del Liceo Francés de Montevideo”[2] y el trabajo de Luis Puig, profesor de la Universidad de Valencia, sobre “Problemas aritméticos

[1] Maza Gómez, Carlos. Sumar y restar. El proceso de enseñanza/aprendizaje de la suma y de la resta. Visor, Madrid, 1989.
[2] Pena, Mónica. El problema. Sumar, restar, multiplicar y dividir. Las estructuras aditiva y multiplicativa. 300 problemas para niños de 6 a 12 años.

escolares”[3] Nos hemos basado en ellos pero no nos hemos ceñido a sus esquemas porque hemos considerado además la categoría de complemento, y sobre todo algunos modelos de problemas complejos con operaciones combinadas, que son los que básicamente nos interesan en el 5º y 6º grado.

Presentamos los siguientes categorías semánticas de problemas en el campo aditivo:

5.1.1. Problemas de incremento o cambio creciente
  a. Los problemas de cambio 1
  b. Los problemas de cambio 3 y 5
  c. Los problemas de incremento con operaciones combinadas

5.1.2. Problemas de resto o cambio decreciente
  a. Los problemas de cambio 2
  b. Los problemas de cambio 4 y 6
  c. Los problemas de resto con operaciones combinadas.

5.1.3. Problemas de combinación
  a. Los problemas de combinación 1
  b. Los problemas de combinación 2

5.1.4. Problemas de complemento
  a. Los problemas de complemento aditivo
  b. Los problemas de complemento sustractivo.

5.1.5. Problemas de comparación
  a. Los 6 casos básicos de comparación
  b. Casos de comparación complejos con unidades de medida
  c. Casos de comparación definida por dos pares de estados

5.1.6. Problemas de igualación

5.1.1. Los problemas de incremento o cambio creciente

a. **Los problemas de cambio 1**

La adición tiene un primer significado de cambio que se entiende como el incremento de una determinada cantidad inicial en el tiempo.

Problema 128

El sábado pasaron por la garita de control 1230 vehículos y el domingo 1520. ¿Cuántos vehículos en total pasaron por la garita durante el fin de semana?

[3] Puig, Luis y Cerdán, Fernando. Problemas aritméticos escolares. Ed. Síntesis, Madrid, 1995.

Desde un punto de vista semántico, éste es un caso, conocido como "cambio 1", en el que tenemos una transformación que incrementa el estado inicial y nos lleva a un estado final. Desde un punto de vista formal el problema corresponde a la estructura a + b = □

1 230 + 1 520 = 2 750

R: Durante el fin de semana pasaron en total 2 750 vehículos.

Pero en 5º y 6º grado los casos de incremento suelen utilizarse con 3 o más sumandos como en este caso:

Problema 129

Viajé de Buenos Aires a Rosario recorriendo 302 km, de Rosario a Córdoba cubriendo un tramo de 405 km y finalmente de Córdoba a Mendoza recorriendo 501 km ¿Qué distancia recorrí de Buenos Aires a Mendoza?

302 + 405 + 501 = 1 208

R : Recorrí en total una distancia de 1208 km de Buenos Aires a Mendoza

Nuevamente atendiendo al contenido semántico podemos apreciar que si en el primer caso se trataba de un incremento con cantidades discretas, ahora se trata de un incremento con magnitudes continuas que en este caso particular, son longitudes. Analizando, por otro lado la estructura formal de este nuevo problema, vemos que corresponde a la estructura a + b + c = □

b. Problemas de cambio 3 y cambio 5

Pero observemos, que hasta el momento los problemas han expresado un cambio que significa aumento o incremento de la cantidad inicial en el tiempo que siempre se ha resuelto mediante la adición. Sin embargo, los problemas de incremento también pueden expresarse de modo que la operación a realizarse sea la sustracción. Por eso, en un estudio semántico de esta naturaleza, no es muy pertinente hablar de "problemas de sumar y restar".Al respecto tenemos que analizar la teoría del cambio que considera:

Cantidad inicial + transformación en el tiempo = cantidad final

En estos problemas la cantidad inicial es sometida a una acción directa que la modifica pero a partir de este esquema podemos entender que no siempre ha de faltar el estado final, sino que puede utilizarse el mismo problema de incremento para ir en busca de la transformación o del estado inicial. A partir de este esquema, podemos hablar de los problemas de incremento que se resuelven por sustracción cuando falta la transformación y los problemas de incremento que se resuelven por sustracción cuando falta la cantidad inicial. A estos problemas Nesher los llama de cambio 3 y cambio 5 respectivamente y Vergnaux los llama problemas ETE (Estado-transformación-estado), donde falta la transformación o el estado inicial.

Comencemos viendo los problemas de cambio 3.

Problema 130

Juan tenía 42 estampillas. Pedro le regala algunas y ahora su colección tiene 50. ¿Cuántas estampillas le regaló Pedro?

En este caso podemos usar la forma no canónica de la adición:

42 + □ = 50

□ = 8

R: Le regaló 8 estampillas.

b) Un problema del mismo tipo pero más adecuado para 5º grado, por la presencia de un dato supernumerario, sería el siguiente:

Problema 131

Roberto salió de paseo. Estaba en Pucusana en el km 59 de la carretera y después de avanzar durante 45 minutos se encontró en el km 144. ¿Cuántos kilómetros avanzó?

59 + □ = 144

□ = 85

R: Avanzó 85 km

Este problema de cambio 3, formalmente puede interpretarse como a + □ = c

c) Ahora pasemos a los problemas de cambio 5 donde, desde un punto de vista semántico falta la cantidad que inicialmente se incrementa y que desde el punto de vista formal podría interpretarse como □ + b = c. Un problema adecuado para 5º porque se usan unidades de medida especiales que implica el conocimiento de conversiones de tiempo sería el siguiente:

Problema 132

Salí temprano de casa. Después de 6 h 45 min regresé y eran las 4:30 p.m. ¿A qué hora salí?

□ + 6:45 = 4:30 p.m.

□ = 9:45 a.m.

R : Salí a las 9:45 a.m.

En realidad, ahora vemos que los problemas que planteamos como incremento simple pueden ser en realidad planteados de modo que falte la transformación o la cantidad inicial. Si además proponemos el uso de magnitudes continuas, este tipo de problema adquiere sentido apropiado en la enseñanza en el 5º.

c. Los problemas de incremento con operaciones combinadas

Pero igualmente podemos concebir un problema de incremento donde la operación de mayor jerarquía sea la adición y uno de los sumandos sea un producto. En realidad en el 5º grado los alumnos usan pocas veces las estructuras formales simples a + b = □, a + □= c y □ + b = c y con mayor frecuencia emplean estructuras complejas.

Aunque consideramos que el dominio de estas estructuras aditivas complejas son materia de 5º y 6º grado, opinamos que también pueden ser trabajadas con éxito en 3º y 4º grado.

1) Analicemos un problema cuya estructura formal correspondería al esquema formal **(a x b) + c = □** y que atendiendo al contenido semántico sería un problema complejo de incremento de unidades discretas.

Problema 133

Tengo 5 sobres con 16 estampillas en cada uno y me regalan 20 estampillas más. ¿Cuántas estampillas tengo ahora en total?

(5 x 16) + 20 =
80 + 20 = 100

R: Ahora tengo 100 estampillas.

2) Pero también podemos considerar un problema donde la adición sea la operación principal pero donde cada uno de los sumandos sea a su vez un producto. El esquema formal de la estructura sería **(a x b) + (c x d) = □.** Atendiendo al contenido semántico se trata de un incremento en el gasto, donde usamos cantidades continuas con unidades monetarias.

Problema 134

Compré 6 bolsas de chocolates a $ 12,50 cada una y luego 7 paquetes de galletas a $ 13 cada uno. ¿Cuánto debo pagar en total?

(6 x 12,50) + (7 x 13) =
75 + 91 = 166
R: Debo pagar $ 166

Este tipo de estructura resulta sencilla en la medida que forma parte de las acciones de la vida diaria y por eso su comprensión inmediata es probable. Hay cierta dificultad con el uso de decimales pero en este caso el contexto real ayuda a superarlas. Si utilizamos cantidades discretas este problema puede ser resuelto con facilidad en el cuarto grado. Nosotros probamos con los 70 alumnos de 4º grado y el problema fue resuelto por el 74% de los niños en la siguiente versión:

Problema 135

Si tengo 6 sobres con 10 estampillas en cada uno y me obsequian 5 sobres con 8 estampillas en cada uno, ¿cuántas estampillas tendré en total?

$(6 \cdot 10) + (5 \cdot 8) =$

$60 + 40 = 100$

R : Tendré 100 estampillas en total.

Hemos comprobado que el problema resulta sencillo usando números naturales pero el mismo tipo de estructura se complica en el 6º grado cuando la utilizamos en un problema con magnitudes continuas, por las transformaciones que es necesario conocer, además de los algoritmos correspondientes a las operaciones con fracciones y decimales. Al menos, tal ocurre si no permitimos el uso de la calculadora. En estas condiciones un problema de este tipo es resuelto por menos del 50% de niños de 6º grado.

Problema 136

Hoy compré 5 ½ kg de azúcar a $ 2,10 el kilogramo y además, 2 ¾ de arroz a $ 1,20 el kg. ¿A cuándo ascendió mi cuenta?

(5,5 x 2,10) + (2,75 x 1,20) =
11,55 + 3,30 = 14,85

Operaciones auxiliares

5,5	2,75
x 2,1	x 1,2

R: Mi cuenta ascendió a $ 14,85

Algunos investigadores sugieren para este tipo de problema, el uso de la calculadora pues argumentan que en la vida real, tales cálculos se llevan a cabo con su auxilio y lo importante no es torturar al alumno con la ejecución de algoritmos de cálculo de difícil ejecución sino la asimilación progresiva de estas estructuras que le servirán para dominar su entorno cotidiano y su aplicación posterior a otras esferas del conocimiento humano.

3) Finalmente podemos escribir un ejemplo de estructura de incremento compleja pero donde ambos sumandos son dos cocientes de la forma:

$(a : b) + (c : d) = \square$

Problema 137

La semana pasada el almacenero recibió 240 jabones y los empacó en cajas de 6. Pero esta semana recibió 150 y los empacó en cajas de 3. ¿Cuántas cajas utilizó en total durante las dos semanas?

$(240 : 6) + (150 : 3) =$
$40 + 50 = 90$

R: Utilizó 90 cajas en total.

De los 70 alumnos de 4º grado este problema fue resuelto por el 91% de ellos. Al parecer la traducción de esta estructura aditiva del lenguaje usual al lenguaje formal resulta bastante simple. Las posibilidades de escribir problemas de incremento de este tipo para los niños de 5º y 6º grado son muy variadas pero lo importante es que en todos estos problemas, la adición es la operación principal y las demás estaban, por así decirlo, subordinadas.

5.1.2. Los problemas de resto o cambio decreciente

Ahora bien, el incremento es sólo uno de los significados usuales del campo aditivo. Nos toca ahora analizar el caso contrario al incremento que es el de decrecimiento en el cual advertimos un resto o residuo, que se obtiene como resultado de una transformación de "disminuir".

¿A qué llamamos resto o residuo? Dada una cantidad inicial A, a la cual se sustrae o quita una cantidad B, llamamos resto a la cantidad C que sobra o queda. Al revisar el estudio de la sustracción en el currículo escolar, observamos que preguntar por los elementos que quedan o sobran es el caso más usual, sobre todo si atendemos a un análisis de los cuadernos o textos escolares.

Pero no se trata sólo de preguntar por el estado final pues así como hay problemas de cambio creciente también hay problemas de cambio decreciente donde hay:

Un estado inicial – transformación decreciente = Estado final

Por lo tanto, según Vergnaux, podemos preguntar tanto por el estado final como por el de transformación y por el estado inicial. Al respecto Nesher habla de problemas de cambio 2, cambio 4 y cambio 6.

Lo interesante es que para resolver problemas de cambio 2 y cambio 4 efectuamos una operación de sustracción mientras que para resolver problemas de cambio 6, efectuamos una operación de adición.

a. Los problemas de cambio 2

Veamos un problema de resto simple conocido como cambio 2, que corresponde al esquema formal a – b = □, pero que a la vez resulte apropiado para 5º grado.

Problema 138

Tenía 1,250 kg de harina. Usé ½ kg para hacer un pastel. ¿Cuántos gramos me quedaron?

1,250 kg = 1 250 g y del mismo modo ½ kg = 500 g, entonces:

1 250 g – 500 g = 750 g

R: Me quedaron 750 g

Formalmente el problema corresponde al esquema a – b = □ que es el más simple de los casos de sustracción pero semánticamente implica el conocimiento de las conversiones con medidas de peso, y es por eso apropiado para 5º grado.

b. Problemas de cambio 4 y cambio 6

Veamos primero un problema de cambio 4, donde falta el estado de transformación y que formalmente corresponde al esquema a - □ = c.

Problema 139

La costurera tenía 1,350 m de tela. Tomó una parte para hacer una blusa y le quedaron 85 cm para la falda. ¿Cuántos centímetros tomó para la blusa?

Tenemos que 1,350 m = 135 cm, por tanto:

135 cm - □ = 85 cm

□ = 50 cm

R: Tomó 50 cm

A este modelo, de cambio 2, pertenece el problema 12 que sólo fue resuelto por el 15% de los alumnos de 2º grado en el formato de historieta. Nosotros observamos que si lo pasamos al formato de texto la dificultad subsiste porque se trata de un problema donde dado el estado inicial y el estado final, falta la transformación, que este caso es una transformación decreciente, utilizando números que requieren cálculos del 11 al 20 completando la decena.

Problema 140

Mamá tenía 15 huevos. Usó algunos para preparar una torta y le quedaron 8 huevos. ¿Cuántos usó para preparar la torta?

15 - □ = 8

□ = 7

R : Usó 7 huevos.

Para nuestros niños de 2º grado no es fácil asimilar el significado propuesto en esta estructura formal como tampoco les resulta sencillo operar con números entre 11 y 20, que impliquen pasar por el 10:

15 – 8 =

(15 – 5) – 3 = 7

Tales cálculos pueden trabajarse a partir de material concreto, pero muchos profesores desconocen estas técnicas y recurren a la memorización de las tablas de sumar y restar, al parecer sin mucho éxito.

Veamos ahora un problema de cambio 6, donde dada la transformación y el estado final, debemos encontrar el estado inicial. Formalmente este tipo de problema corresponde a la estructura □ - b = c

Problema 141

Papá tenía cierta cantidad de dinero. Entró a comprar una revista que le costó S/. 2,5 y regresó con S/. 7,5, ¿cuánto dinero tenía inicialmente?

□ - 2,5 = 7.5

□ = 10

R: Papá tenía inicialmente S/. 10

Un problema que reviste mayor dificultad porque la estructura formal no es tan evidente como en el caso anterior es el siguiente;

Problema 142

Vendí en $ 96 un reloj perdiendo en la venta $8 ¿Cuánto me costó el reloj?

Si perdimos 8 y nos quedan 96, en realidad el precio de costo lo obtendremos buscando el estado inicial:

□ - 8 = 96
□ = 104

Pero al parecer esta estructura no es adecuada para el 4º grado porque fue resuelto solamente por el 26% de nuestros 70 de alumnos de 4º grado y por el 43% de los que se presentaban al ingreso al 5º grado, que tal vez por tratarse de una evaluación decisiva leyeron con más atención.

¿Es este problema adecuado para el 5º y 6º grado? Definitivamente si, aunque para muchos grupos represente un reto. En particular fue resuelto por el 77% de los niños del 5º grado 1, que son un grupo con un alto grado de competencia pero eso no quiere decir que otros grupos no puedan trabajar con esta estructura hasta lograr su correcta asimilación.

c. Problemas de resto con operaciones combinadas

Pero en el 5º y 6º grado las posibilidades de plantear problemas de resto combinando operaciones subordinadas son definitivamente más interesantes. Veamos algunos casos seleccionados de resto.

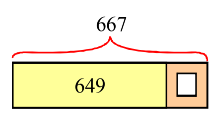
1) Cuando el minuendo está compuesto por dos cantidades que se adicionan

Problema 143

El colegio adquirió 342 libros de lenguaje y 325 libros de matemáticas. Si se vendieron en total 649, ¿cuántos quedaron?

La estructura de este problema sería: (a + b) – c = □

(342 + 325) – 649 =
667 – 649 = 18



R: Quedaron 18 libros.

2) Cuando el sustraendo está compuesto por dos cantidades que se adicionan, en cuyo caso, éstas pueden ser reemplazadas por un doble sustraendo:

Problema 144

Tenía 650 estampillas. Vendí 240 y regalé 70. ¿Cuántas me quedaron?

La estructura formal sería: a – (b + c) = □ pero también podía ser resuelto por la forma equivalente utilizando dos restas sucesivas, y en ese caso sería:

a – b – c = □.

Las soluciones correspondientes que conviene comparar serían:

650 – (240 + 70) = o también 650 – 240 – 70 =

650 – 310 = 340 410 – 70 = 340

R : Me quedaron 340 estampillas.

3) Cuando el minuendo es un número que está compuesto por un producto la estructura formal sería: (a x b) - c = □ y no tiene mayor dificultad. Pero en el problema siguiente la dificultad está dada por el verbo “subir” utilizado en la redacción. Muchos alumnos asocian el verbo subir con el incremento de la cantidad y suman por ese motivo.

Problema 145

Un tren tiene 10 filas de 36 asientos cada una. Subieron y tomaron asiento 285 personas, ¿cuántos asientos sobraron?

(10 x 36) – 285 =

360 – 285 = 76

R: Sobraron 76 asientos

Si en lugar de usar el verbo “subir” usamos el verbo “ocupar” la dificultad es menor. Tendríamos: Un tren tiene 10 filas de 36 asientos cada una. En el primer paradero 285 personas ocuparon los asientos. ¿Cuántos asientos sobraron?

4) Un problema más complejo se plantea cuando el minuendo está compuesto por un producto y el sustraendo por dos cantidades que se adicionan. La estructura formal sería (a x b) - (c + d) = □ o su equivalente (a x b)–c– d = □

Problema 146

Hoy acudí al supermercado y pagué una cuenta de S/. 355 por alimentos y otra de S/. 125 por farmacia entregando 10 billetes de S/. 50. ¿Cuánto recibí de vuelto?

(10 x 50) – (355 + 125) = o también (10 x 50) – 355 – 125 =

500 – 480 = 20 500 – 355 – 125 = 20

R : Recibí S/. 20 de vuelto

5) Un caso más complejo lo tenemos cuando el sustraendo está compuesto por varios productos que se adicionan.

Problema 147

Compré 6 kg de carne a S/. 15 y 12 kg de papa a S/. 3. Si tenía un billete de S/. 200, ¿cuánto dinero me resta?

200 – (6 x 15 + 12 x 3) =	o también	200 – (6 x 15) – (12 x 3) =
200 – (90 + 36) =		200 – 90 – 36 = 74
200 – 126 = 74		

R: Me resta S/. 74.

6) Igualmente el minuendo puede estar compuesto por varios productos que se suman:

Problema 148

El cocinero tenía 3 cajas de huevos de 6 unidades, 6 cajas de 12 unidades y 4 cajas de 15 unidades al iniciar la semana. Si durante la semana utilizó 95 huevos, ¿cuántos le quedan?

(3 x 6 + 6 x 12 + 4 x 15) – 95 =
(18 + 72 + 60) – 95 =
150 – 95 = 55

R: Le quedan 55 huevos.

Podríamos seguir elaborando más combinaciones para auxiliar al maestro en su diaria práctica docente pero lo que pretendemos ilustrar no es la gran variedad de casos posibles sino la posibilidad de desarrollar algunos de éstos bajo el esquema de resto o residuo.

Este tipo de problemas de resto o residuo son en verdad los más comunes y sin embargo la sustracción tiene otros significados más interesantes que el resto y en especial, los de combinación sustractiva, complemento, y diferencia son muy significativos. Pero para llegar a la combinación sustractiva tenemos que trabajar previamente la combinación aditiva, que es el segundo significado de la adición.

5.1.3. Los problemas de combinación

a. Los problemas de combinación 1

Hay un segundo significado en el campo aditivo que no significa necesariamente incremento de la cantidad inicial sino reunión de dos subconjuntos para formar un nuevo conjunto. Estos problemas se llaman de combinación 1 porque los subconjuntos se combinan para formar un nuevo conjunto. Como se puede observar al analizar los ejemplos, en la combinación no hay incremento de la cantidad inicial en el tiempo sino reunión de subconjuntos que pueden coexistir al mismo tiempo.

1) Estos problemas pueden parecer muy simples para el 5º grado, pero pueden ser útiles para repasar el cálculo mental y reconocer los subconjuntos implicados. Por otro lado, como veremos, a partir de la estructura básica, que damos a continuación, se puede llegar a situaciones complejas.

Problema 149

Tengo 250 naranjas y 180 manzanas, ¿cuántas frutas son?

250 + 180 =
250 + 50 + 130 = 430

R: Son 430 frutas.

En este caso el problema es más elaborado desde el punto de vista semántico porque se reúnen dos subclases, naranjas y manzanas bajo la clase frutas. Sin embargo la estructura formal es la más simple: $a + b = \square$

2) Veamos un caso más complejo, donde intervienen tres clases.

Problema 150

En una granja hay 250 pollos, 80 gallinas y 50 gallos. ¿Cuántas aves hay en la granja?

250 + 80 + 50 =
(250 + 50) + 80 = 300 + 80 = 380

R: En la granja hay 380 aves

En este caso reunimos las subclases pollos, gallinas y gallos bajo el concepto de aves. La estructura formal corresponde al esquema: $a + b + c = \square$. Al efectuar las operaciones de cálculo mental hemos aprovechado para repasar la aplicación de las propiedades conmutativa y asociativa.

3) El problema anterior es simple y lo pudo resolver el 90% de los niños de 4º grado pero se complica cuando en el enunciado añadimos un dato supernumerario y el concepto de doble.

La estructura en el siguiente caso sería $a + (2 \cdot a) + b = \square$

Problema 151

En la granja hay 20 gallos y el número de gallinas es el doble. Hay también 60 pollos y 15 conejos. ¿Cuántas aves hay en total?

$20 + (2 \times 20) + 60 =$

$20 + 40 + 60 = 120$

R: Hay 120 aves.

En este problema solo acertaron 60% de los 70 niños de 4º grado de nuestro colegio y 68% de los 58 niños postulantes al 5º grado de nuestro colegio.

4) Veamos otro tipo de complicaciones que puede presentarse en este tipo de problemas. Aquí tenemos un caso donde las subclases "mesas" y "sillas" son reunidas bajo la clase "muebles" y donde la estructura formal sería:
$a + (a \times b) = \square$

Problema 152

Mamá compró 2 mesas, cada una de las cuales tenía 6 sillas. ¿Cuántos muebles compró?

$2 + (2 \times 6) =$
$2 + 12 = 14$

R : Mamá compró 14 muebles.

En este ejemplo algunos alumnos no consideraron las dos mesas iniciales pero no porque excluyeran a las mesas como parte de la clase "muebles", sino porque consideran que al efectuar el producto 2 x 6 ya estaban incluyendo a las dos mesas. Aquí les ha faltado visión de la estructura formal del problema que responde al esquema $a + (a \times b) = \square$.

5) Veamos un problema similar con un dato supernumerario y una estructura formal de cuatro términos, tal como: $a + (a \times b) + c + d = \square$

Problema 153

En el salón de un restaurante hay 5 mesas con 4 sillas en cada una, dos aparadores, un mostrador y tres mozos. ¿Cuántos muebles hay en el salón?

$5 + (5 \times 4) + 2 + 1 =$
$5 + 20 + 2 + 1 = 28$

R: Hay 28 muebles en el salón.

En este último problema se juntan las dos dificultades y con frecuencia, o no se incluyen las mesas o se incluye el dato supernumerario. Presentar a los niños de 5º y 6º grado este tipo de problema nos permite evitar la mecanización en la lectura, y estimular la atenta y precisa consideración de los datos para obtener la información relevante.

b. Los problemas de combinación 2

Naturalmente que por reversibilidad es posible plantear el correspondiente problema de sustracción para cada uno de los problemas planteados.

1) Analicemos algunos más o menos similares para ilustrar la combinación sustractiva.

Problema 154

Hay 480 cítricos entre naranjas y mandarinas. Si hay 230 naranjas, ¿cuántos mandarinas hay?

$480 – 230 = 250$

R: Hay 250 mandarinas.

Igualmente se consideran dos subclases naranjas y mandarinas bajo la clase de cítricos pero ahora dada la clase, preguntamos por una de las subclases. La estructura formal corresponde al esquema básico c – a = □

Este problema también puede ser resuelto bajo el concepto de complemento como veremos más adelante, pero en este caso se trata del complemento de una subclase y no del complemento de una de las cantidades y un total.

En ese caso adoptaríamos la forma no canónica: a + □ = c [4]

[4] Los especialistas llaman forma no canónica a las formas menos usuales de plantear las operaciones de resolución. Se refieren sobre todo a formas tales como a + □ = c, a - □ = c, □ - b = c, etc..

2) Veamos un problema con tres términos.

Problema 155

El almacén de una juguetería recibe 360 juguetes entre muñecas, osos de peluche y porfiados. Si hay 180 muñecas, 120 osos de peluche, ¿cuántos porfiados hay?

360 – 180 – 120 = 60

R: Hay 60 porfiados.

En este caso se trata de 3 subclases: “muñecas”, “osos de peluche” y “porfiados” que se reúnen bajo la clase “juguetes”. La estructura formal canónica o forma estándar corresponde al esquema: d – a – b = □

Pero también puede resolverse con una estructura formal canónica equivalente:

d – (a + b) = □ puesto que por la propiedad respectiva: a – b – c = a – (b + c)

Así tendríamos una segunda solución alternativa:

360 – (180 + 120) =
360 – 300 = 60

Incluso si esta combinación se considera bajo el concepto de complemento, que analizaremos más adelante, puede adoptarse una forma no canónica o no estándar: a + b + □ = d y tendríamos una tercera solución, de fácil resolución por cálculo mental:

180 + 120 + □ = 360
300 + □ = 360
□ = 60

3) El siguiente es otro problema complejo de combinación sustractiva:

Problema 156

En la granja hay 130 aves entre gallinas, pollos y gallos. Si las gallinas son 40 y el número de pollos es el doble, ¿cuántos gallos hay?

130 – 40 – (2 x 40) =
130 – 40 – 80 = 10

R : Hay 10 gallos.

La estructura formal en este caso es: d – a – 2b = □ pero también podría resolverse por la forma equivalente:

130 – (40 + 2 x 40) =

130 – (40 + 80) =

130 – 120 = 10

Por la forma no canónica, el problema sería abordado como búsqueda del complemento y la estructura sería:

40 + (2 x 40) + □ = 130

40 + 80 + □ = 130

□ = 10

4) En el siguiente problema la estructura compleja sería: e – a – (a x b) – c = □

Problema 157

En un salón hay 90 muebles. Sabemos que hay 5 mesas con 16 sillas en cada mesa, 2 sillones y varios aparadores. ¿Cuántos aparadores hay?

90 – 5 – (5 x 16) – 2 =
90 – 5 – 80 – 2 = 3

R: En el salón hay 3 aparadores

Usando la forma canónica equivalente la solución sería:

90 – (5 + 5 x 16 + 2) =
90 – (5 + 80 + 2) =
90 – 87 = 3

Pero este problema resulta más sencillo usando la forma no canónica:

5 + (5 x 16) + 2 + □ = 90

5 + 80 + 2 + □ = 90
87 + □ = 90
□ = 3

Finalmente, como hemos apreciado, en la categoría de combinación se han incluido los problemas que plantean una relación entre conjuntos que responde al esquema parte-todo. La combinación 1 versa sobre la determinación del todo mientras que la combinación 2, versa sobre la búsqueda de una de las partes. No hay combinación 3 porque las partes son intercambiables.

5.1.4. Los problema de complemento

¿Vale la pena incluir la categoría semántica de complemento? Para estudiar el complemento podemos distinguir entre un complemento aditivo y un complemento sustractivo.

Dado un número de unidades A menor que un número de unidades B, llamamos complemento aditivo de A al “número de unidades x” que le falta a A para completar el mismo número de unidades que B.

$A + \square = B$ $\qquad$ $10 + \square = 15$

Del mismo modo cuando A es mayor a B, llamamos complemento sustractivo de A al número de unidades x que le debo restar a A para llegar al mismo número de unidades que B.

$A - \square = B$ $\qquad$ $15 - \square = 10$

En este trabajo, hemos incluido el significado de complemento puesto que los casos de complemento contienen un matiz semántico que no se expresa en los casos de cambio 3 y 5, que aunque tienen la misma estructura formal, son casos donde está presente la idea de “lo que falta” o “lo que se quita” para obtener un todo, que no siempre es relevante en los casos de cambio donde se atiende en general a un estado final producto de una transformación.

Del mismo modo, complemento y combinación no son iguales porque muchos casos de complemento no son casos de combinación de clases puesto que el concepto de complemento apunta a lo que falta para completar una cantidad total aunque ese total esté formado por elementos de una misma clase, mientras que el concepto de combinación necesariamente involucra subclases de elementos diferentes que se reúnen en una sola clase.

Por tanto, podría afirmarse que la categoría semántica de complemento es un híbrido, que comparte algunos elementos con el cambio 3 y cambio 5 y algunos otros elementos con la combinación 2.

a. Complemento aditivo

Veamos algunos casos que ilustren el trabajo con el concepto de complemento.

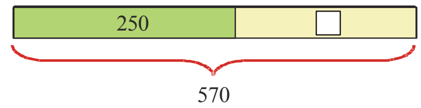
1) En primer lugar veamos un caso de complemento aditivo simple.

Problema 158

De Lima a Trujillo hay 570 km de distancia. Ya hemos recorrido 250 km, ¿cuántos kilómetros nos faltan para llegar?

250 + □ = 570

570 – 250 = 320



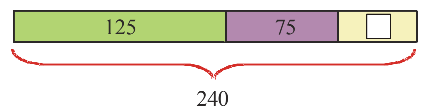
R: Nos faltan 320 km para llegar

2) Luego veamos el caso cuando en el primer sumando hay varias cantidades que se adicionan.

Problema 159

Para comprarme una bicicleta montañera que cuesta \$ 240 he reunido el mes pasado \$ 125 y este mes \$ 75. ¿Cuánto dinero me falta ahorrar?

(125 + 75) + □ = 240
200 + □ = 240
□ = 40



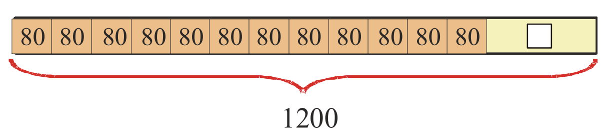
R: Me falta ahorrar \$ 40

3) En tercer lugar veamos casos con operaciones combinadas, empezando por el caso cuando el primer sumando es un producto.

Problema 160

Compro un televisor en \$ 1200. Después de pagar 12 cuotas mensuales de \$ 80 cada una, ¿cuánto dinero debo?

12 x 80 + □ = 1200
960 + □ = 1200
□ = 240



R: Debo \$ 240

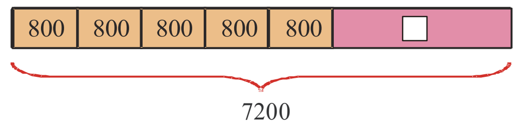
Del mismo modo el problema de los móviles que deben recorrer una distancia determinada para completar un recorrido, que presentamos como problema 34, puede ser resuelto con la estrategia del complemento. Este problema fue resuelto con 5 estrategias diferentes y ahora tendremos la oportunidad de resolverlo con una sexta estrategia de solución.[5]

[5] En el capítulo IV cuando hablamos de las estrategias presentamos 5 soluciones posibles para este tipo de problema. Ahora estamos dando una nueva, al tratar el problema como un caso de complemento.

Problema 161

Un avión debe recorrer 7200 km. Después de 5 horas de vuelo a 800 km por hora, ¿cuántos kilómetros le faltan para llegar?

(5 x 800) + □ =7 200
4000 + □ = 7200
□ = 3200



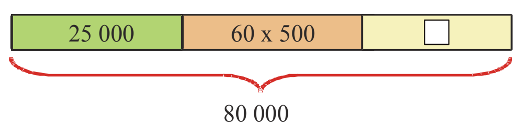
R: Le falta recorrer 3200 km

4) En el siguiente caso de complemento aditivo que presentamos con operaciones combinadas, el primer sumando es aún más complejo.

Problema 162

Mi papá compró una casa en $ 80 000. Si pagó $ 25 000 de cuota inicial y además $ 500 mensuales durante 60 meses, ¿cuánto le falta pagar?

(25 000 + 60 x 500) + □ = 80 000
25 000 + 30 000 = 80 000
55 000 + □ = 80 000
□= 25 000



R: Le falta pagar $ 25 000

b. El complemento sustractivo

1) Veamos ahora el primer caso del **complemento sustractivo simple**. Como ya lo expresamos el complemento sustractivo es lo que le debo quitar a una cantidad para llegar a otra determinada.

En este caso nuestro problema incluye un dato supernumerario que complica ligeramente los resultados de la evaluación.

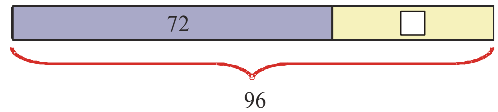
Problema 163

Mi mamá pesa 96 kg. El médico le dice que debe bajar de peso y le ha fijado como meta 72 kg en el término de 6 meses de dieta. ¿Cuántos kilogramos de peso debería bajar?

96 - □ = 72

□= 24

R : Debe bajar 24 kg de peso.

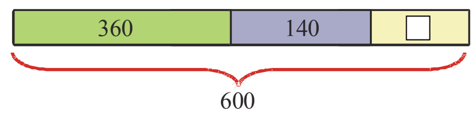


2) Para terminar, analicemos un segundo caso de complemento sustractivo cuando el sustraendo tiene más de un término.

Problema 164

En un buque llegan 600 t de azúcar. Después de dos días el barco partió con 360 t. El primer día se descargaron 140 t, ¿cuántas toneladas se descargaron el segundo?

600 – 140 – □ = 360
460 – □= 360
□ = 100



R: El segundo día se descargaron 100 t de azúcar.

Podríamos sugerir diversidad de variaciones semánticas pero lo que queremos demostrar es que la sustracción también puede trabajarse con la noción de complemento, que tal como definimos es lo que falta aumentar o lo que falta disminuir a una cantidad dada para llegar a una determinada cantidad. En todos los casos de búsqueda del complemento se trata de un todo que debe alcanzarse aumentando o disminuyendo una parte, parte que puede ser representada estratégicamente por un segmento de recta en una sola recta.

El concepto de complemento es recomendable para los casos de distancias recorridas, ahorros de dinero y cargas de peso y otros problemas con magnitudes. Aunque también es útil aplicarlo para muchos casos de combinación sustractiva que pueden ser resueltos bajo el concepto de complemento aditivo

Un aspecto interesante de los problemas de complemento es que pueden introducirse gradualmente en la enseñanza a partir del 1º grado. Un problema fácil, tal como: “De mi casa al colegio debo recorrer 10 cuadras. Si ya caminé 6, ¿cuántas cuadras me faltan?” fue resuelto por el 90% de los niños de 1º grado, al igual que el siguiente: “Necesito $ 8 para comprar una pelota y sólo tengo 3, ¿cuánto me falta ahorrar?” Un problema de complemento, interesante para el tercer grado, sería: “Lulú va a comprar el diario y entrega dos monedas de 50 centavos. Si el diario cuesta 125 c, ¿cuánto dinero le falta?”
En el tercer y cuarto grado ya podemos trabajar con las estructuras más simples de los casos presentados pero es recién en el 5º y 6º que podemos trabajarlas en los casos más elaborados y por supuesto con fracciones y decimales, e incluso utilizando conversiones con unidades de medida.

5.1.5. **Los problemas de comparación**

Los problemas de comparación se pueden resolver bajo el concepto de diferencia. Dadas dos cantidades A y B, donde A es mayor que B, llamamos diferencia de A y B al número de unidades en que A es mayor a B o al número de unidades en que B es menor a A.

Para representar gráficamente los casos de comparación podemos utilizar como estrategia dos segmentos de recta que ilustren la diferencia entre ambas cantidades. Recordemos que el complemento era representado en un solo segmento de recta mientras que la comparación precisa de dos segmentos.

Vamos a presentar los casos básicos de comparación simple y luego algunos casos de diferencia con términos complejos que requieren la conversión de unidades de longitud, peso y tiempo.

a. **Los seis casos básicos de comparación**

En la comparación tenemos: una cantidad de referencia, una cantidad comparada y una diferencia entre ambas. Como el sentido de la comparación puede hacerse en términos de "más que" o "menos que y se puede buscar cualquiera de las 3 cantidades, los casos básicos resultan ser seis.

1) Comparación 1

En este caso tenemos la cantidad de referencia y la cantidad comparada y buscamos la diferencia en términos de "más que"

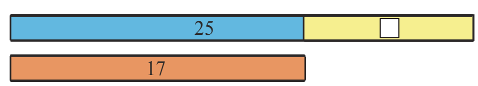
Problema 165

José tiene 25 años y Jorge 17. ¿Cuántos años más que Jorge tiene José?

25 – 17 = 8

José

Jorge



R: José tiene 8 años más.

2) Comparación 2

En el mismo problema anterior igualmente podíamos haber preguntado por la diferencia en términos de "menos que"

Problema 166

José tiene 25 años y Jorge 17. ¿Cuántos años menos que José tiene Jorge?

Naturalmente la solución sería la misma, pero la respuesta sería:

R: Jorge tiene 8 años menos que José.

Por tanto, dada la cantidad de referencia y la cantidad comparada, la diferencia es la misma aunque sea buscada en términos de "más que" o de "menos que". Esta característica se puede verificar utilizando la forma no canónica, con la cual se aprecia que "8 elementos más que 17 son 25" y que " 8 elementos menos que 25 son 17". Así tenemos:

17 **+ 8** = 25

25 **– 8** = 17

3) Comparación 3

Veamos ahora uno de los casos más sutiles de comparación, donde nos dan la cantidad de referencia y la diferencia para hallar la cantidad comparada en términos de "algunas unidades más que". Este caso de comparación 3 corresponde al cálculo de adición en contraste con los anteriores.

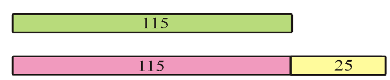
Problema 167

La primera función de cine duró 115 min y la segunda 25 min más que la primera. ¿Cuántos minutos duró la segunda?

(115 + 25) = 140

1º función

2º Función



R: La segunda función duró 140 minutos.

Este es el primer caso de la comparación que corresponde a la adición y no reviste mayor dificultad para niños de 3º grado puesto que la palabra "más" induce al niño a la suma. Pero en el caso de niños de 2º grado, depende de la asimilación de los términos "más que". La dificultad de este tipo de problemas sobre todo se hace evidente cuando se pregunta: ¿Cuánto tiempo duraron las dos funciones? En ese caso muchos niños de 3º y 4º grado presentan cierta dificultad con la solución:

115 + (115 + 25) =

115 + 140 = 255 minutos

y sin duda esta pregunta sería muy compleja para los pequeños de 2º grado.

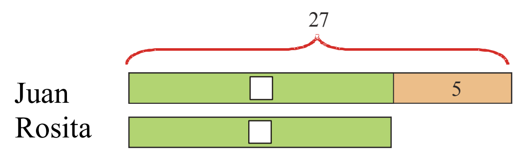
4) Comparación 4

En la comparación 4 se nos da igualmente la cantidad de referencia y la diferencia pero se pregunta por la cantidad comparada en términos de "algunas unidades menos que". En este caso la pregunta no reviste mayor dificultad puesto que la palabra "menos que" induce a la operación correcta que en este caso es la sustracción. Pero igualmente cuando se plantea una pregunta compleja los niños de 3º y 4º tienen ciertas dificultades.

Problema 168

Juan pesa 27 kg . Rosita pesa 5 kg menos que Juan.¿Cuántos kilos pesa Rosita?

$(27 - 5) = 22$



R: Rosita pesa 22 kg

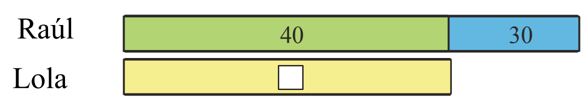
5) Comparación 5

Todavía podemos hallar dos casos aún más sutiles de comparación. Se trata de los casos de comparación 5 y 6. Veamos el caso 5, donde nos dan el término comparado y la diferencia para hallar el término de referencia.

Problema 169

Raúl tiene $ 70. Él tiene $ 30 más que Lola. ¿Cuánto dinero tiene Lola?

$70 = \square + 30$



R: Lola tiene $ 40

Este caso reviste cierta dificultad en la medida en que se mencionan los términos "más que" y sin embargo es necesario restar.

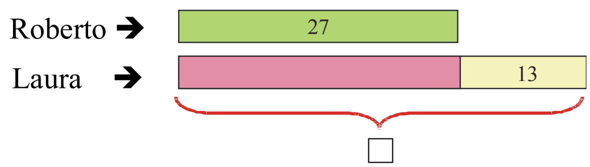
6) Comparación 6

Este el caso más difícil de comparación simple, puesto que nos dan la cantidad comparada y la diferencia en términos de "menos que" y sin embargo es necesario sumar.

Problema 170

Roberto tiene 27 años. Él tiene 13 años menos que su hermana Laura. ¿Cuántos años tiene Laura?

27 + 13 = 40



R: Laura tiene 40 años.

Como hemos podido apreciar, en los seis casos de comparación simple, los esquemas formales de solución son muy simples, en cuatro de los casos tenemos a – b = □ y en los otros dos casos a + b = □.

Toda la dificultad está en el nivel semántico por el uso de los términos "más que" y "menos que". Pero como hemos visto esta dificultad se alivia en cuanto graficamos la diferencia para comparar las cantidades mediante dos segmentos de recta. Esta estrategia puede aclarar la comparación y facilitar la solución. Veamos ahora casos de diferencia más complejos.

b. Casos de comparación complejos con unidades de medida

Como sabemos la diferencia se puede aplicar a cualquier cantidad expresada en unidades discretas pero se usa con mucha frecuencia para comparar magnitudes tales como unidades de tiempo, dinero, longitud, peso, capacidad, superficie, volumen y velocidad. En el "enfoque problémico" los problemas de diferencia se trabajan expresamente con cada una de estas unidades de medida por cuanto se trata de "matematizar" dando una mirada al mundo real.

1) Veamos un problema que involucra conversiones y requiere la conversión de medidas de longitud:

Problema 171

Un lápiz mide 1 dm 8 cm y otro mide 150 mm. ¿Cuál es la diferencia entre ambos?

1 dm 8 cm = 100 mm + 80 mm = 180 mm
180 – 150 = 30 mm

R: La diferencia es de 30 mm

Muchos problemas de diferencia requieren una transformación previa de unidades. En este caso se trata de unidades longitud cuya equivalencia es fácil deducir a partir del cuadro de conversiones siguiente donde se aprecia la equivalencia:

M	dm	cm	mm
	1	8	0

2) Pero también podemos pedir la diferencia en un caso que requiera conversión con medidas de peso:

Problema 172

Un camión transporta 1 t 600 kg mientras que otro transporta 1 ½ t.
¿Cuántos kilogramos más transporta el primero?

1 t 600 kg = 1 x 1000 + 600 = 1600 kg
1 ½ t = 1000 kg + 500 kg = 1500 kg
1600 – 1500 = 100

R: El primero transporta 100 kg más.

En este caso el cuadro de equivalencia sería:

t			**kg**
1	6	0	0

El cuadro resulta siempre más intuitivo que las operaciones de conversión multiplicando por 10, 100, 1000, etc… según los lugares decimales.

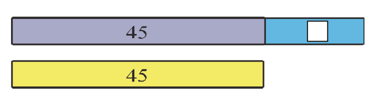
3) En el caso de unidades de tiempo hay que considerar que las conversiones varían sus valores en cada caso. Así un año tiene 365 días, un día tiene 24 horas pero una hora tiene 60 minutos y un minuto 60 segundos. Inclusive un año tiene 52 semanas y una semana 7 días y asimismo un año tiene 12 meses y un mes comercial se calcula en 30 días. De modo que conviene dedicar un buen tiempo a trabajar los problemas de diferencia con unidades de tiempo. Veamos un problemas de diferencia con semanas planteado a nivel de 5º grado pero que les resultó difícil a un grupo de alumnos de 4º grado:

Problema 173

Pedro y Ricardo son los alumnos que registran el mayor número de faltas a clase. Pedro ha faltado 7 semanas y Ricardo 45 días. ¿Cuántos días más ha faltado Pedro que Ricardo?

Pedro ➔ 7 x 7 días = 49 días
Ricardo ➔ 45 días

Pedro
Ricardo



(7 x 7) – 45 =
49 – 45 = 4

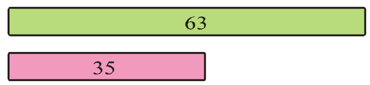
R: Pedro ha faltado 4 días más que Ricardo.

4) En este caso la conversión planteaba que el minuendo fuese un producto. Pero también podemos tratar el caso cuando el minuendo y el sustraendo son productos.

Problema 174

Tengo 9 semanas de vacaciones en verano y 5 semanas en invierno. ¿Cuántos días de vacaciones más tengo en verano que en invierno?

Verano ➔ 7 x 9
Invierno ➔ 7 x 5



7 x 9 - 7 x 5 =
63 – 35 = 28

R: En verano tengo 28 días de vacaciones más que en invierno.

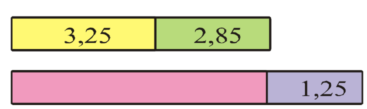
Este problema fue resuelto por el 67% de los 70 niños del 4º grado de nuestro colegio. En este caso fue el contexto que ayudó a su fácil comprensión y naturalmente tanto el tema de la semana como el concepto de la diferencia, dadas dos cantidades habían sido ampliamente desarrollados. Para el caso de 5º grado el problema fue resuelto por el 90% de los niños, debido a que todos los significados del lenguaje usual (vacaciones, semanas, días) y los conceptos matemáticos implicados (sustracción, diferencia) eran ya ampliamente conocidos en el 5º.

6) Por último veamos un caso de comparación 6.

Problema 175

Marcos gasta $ 3,25 en flores y $ 2,85 en una caja de bombones para regalar a su madre. Eso es $ 1,25 menos de lo que gastó su hermana Magdalena para el mismo fin. ¿Cuánto gastó Magdalena en su regalo?

(3,25 + 2,85) + 1,25 =
6,10 + 1,25 = 7,35



R: Magdalena gastó $ 7,35

En general los casos de comparación usando unidades de medida son los que resultan más difíciles de resolver a los niños de 3º y 4º grado por eso requieren trabajo y atención especial. Más aún cuando se trata de los casos de comparación 5 y 6. Normalmente el manejo de estos casos no se alcanza hasta que existe un mayor dominio del lenguaje en el 5º grado. Pero la dificultad se alivia y puede alcanzarse antes, cuando utilizamos como estrategia para la comparación, la representación mediante dos segmentos de recta.

c. Casos de comparación definida por dos pares de estados

1) Vamos ahora a analizar un caso particular de comparación definida por dos pares de estados que puede ser abordada a partir del 5º grado. En este caso aparecen tres datos y se busca el cuarto.

Problema 176

Cuando Pepe se pesó con Lulú, que pesaba 25 kg, la balanza marcaba 85 kg. Luego Pepe se pesó con Tobi y la balanza indicó 100 kg. ¿Puedes decir cuanto pesaba Tobi?

Pepe + Lulú = 85

Pepe + Tobi = 100

60 + 25 = 85
60 + 40 = 100

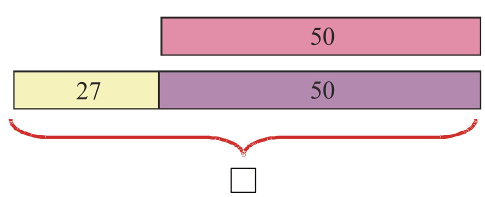
R: Tobi pesaba 40 kg

2) En algunos casos no se menciona sino 2 cantidades porque se asume que la persona al nacer tiene 0 años. Esta omisión trae una nueva dificultad:

Problema 177

Cuando nací mi mamá tenía 27 años. Acabo de cumplir 50 años. ¿Cuántos años tiene mi mamá?

Yo
Mamá
0 + 50 = 50
27 + 50 = 77



R: Mamá tiene actualmente 77 años.

3) Veamos uno caso de diferencia de edades cuando se mencionan ambas.

Problema 178

Cuando mis padres se casaron ella tenía 25 años y él 31. Si ahora mamá tiene 77 años, ¿cuántos años tiene papá?

Mamá .... 25 .... - - - - - - - - 52 - - - - - - - - = 77

Papá - - - - - - - - - 31 - - - - - - - - - - - - - - - - 52 - - - - - - - - = □

Este problema se puede resolver calculando los años que pasaron
77 – 31 = 52,
y luego sumando la edad de papá a los años que pasaron
31 + 52 = 83

Pero también calculando la diferencia entre ambas edades que es de 6 y sumándola a la edad de mamá, 6 + 77 = 83 como en el siguiente cuadro:

	Antes	Hoy
Mamá	25	77
Papa	31	**83**
Diferencia	6	6

R: Papá tiene actualmente 83 años.

4) Por último, presentamos un problema para establecer la diferencia de horarios y a partir de ese dato, resolver la situación planteada.

Problema 179

El ómnibus que sale de Lima a las 8:30 llega a Trujillo a las 15: 45. ¿A qué hora sale de Lima el siguiente bus que llega a Trujillo a las 21:30?

Primer bus 8:30 - - - - - - 7h 15 min - - - - - - 15:45

Siguiente bus □ - - - - - - 7h 15 min - - - - - - 21:30

21:30 – 7:15 = 14:15

R: El siguiente bus sale de Lima a las 14:15

5) En este punto sugerimos crear problemas teniendo en cuenta el cambio de horarios. Por ejemplo, un acontecimiento ocurrió en España a las 5:30, ¿a que horas ocurrió en el Perú si la diferencia horaria es de 6 horas? O también preguntar por la diferencia horaria dadas las horas de un partido de fútbol que en una ciudad tiene lugar a las 12:30 y se trasmite en directo a las 17:30.

Veamos un caso planteado en base a las pruebas de Pisa:

> **Problema 180**
>
> Hans de Berlín y Charlie de Sydney se comunican a través del Internet mediante el chat y tienen que conectarse a la vez para poder chatear. Charlie llama a Hans a las 7:30 a.m. cuando en Sydney son las 4:30 p.m. Pero a veces lo llama a las 10 p.m. hora de Berlín, ¿qué hora marca el reloj en Sydney en ese momento?

Establecemos la diferencia horaria entre las dos ciudades;

7:30 + **9 horas** = 4:30

Luego, dada la diferencia y uno de los horarios, hallamos el otro:

10 p.m. + 9 horas = **7:00 a.m.**

R: El reloj marca las 7 a.m. en ese momento.

En el enfoque problémico es muy importante elaborar problemas con los acontecimientos de la vida diaria porque se trata que el alumno valore y utilice la matemática en su vida diaria. Se trata en suma, de una “matemática para la vida” y es muy importante que en esta fase el alumno también aprenda a plantear sus propios problemas. Pero también se trata de un trabajo interdisciplinario y es necesario aprovechar la información de datos numéricos de otros cursos, tales como Ciencias Naturales y Ciencias Sociales para construir problemas especialmente trabajando en grupo.

Podríamos seguir dando ejemplos de comparación utilizando un sinfín de magnitudes definidas por dos pares de estados pero nuestro principal objetivo es solamente resaltar la importancia de trabajar el concepto de diferencia comparativa y sugerir como herramientas estratégicas los sencillos esquemas que hemos presentado.

Ahora bien, si analizamos el grado de dificultad de los problemas de comparación respecto a los problemas de cambio, de combinación y de complemento apreciamos que la dificultad es mayor en los problemas de comparación. Especialmente la dificultad es mayor en los casos de comparación 5 y 6, en que las menciones “más que” y “menos que” inducen a error respecto a las operaciones que deben utilizarse.

Pero también la comparación 1 y 2 se ve afectada cuando se incluyen unidades de medida poco trabajadas por el grupo de alumnos que se analiza y por eso es importante una preparación previa en la transformación de unidades de medida. Tal vez los casos más difíciles sean los últimos mencionados, definidos por la comparación de dos pares de estados, en donde además intervienen las unidades de medida, cuyas conversiones es necesario dominar.

5.1.7. Los problemas de igualación

Como hemos apreciado en los problemas de comparación no hay incremento pues en una comparación las cantidades permanecen iguales a si mismas durante todo el proceso. Sin embargo si las cantidades varían durante el proceso de comparación estamos ante un caso de igualación.

En efecto, en la igualación las cantidades comparadas no permanecen estáticas sino que se somete a un proceso de transformación a una de las cantidades dadas para conseguir igualarla numéricamente a la otra. Por este proceso los teóricos hablan de la igualación como un híbrido de la comparación y el cambio.

En la igualación distinguimos también la cantidad de referencia, la cantidad comparada y la diferencia. Pero la comparación entre la cantidad de referencia y la cantidad comparada aparece establecida por el comparativo de igualdad "tantos como" que puede ser en sentido de cambio en más o menos, dependiendo de la relación entre la cantidad de referencia y la cantidad comparada. Como en este caso, también se presentan la búsqueda de tres cantidades y dos sentidos, tenemos igualmente seis casos de igualación.

1) Igualación 1

Problema 181

En el campeonato de fútbol la "U" ha obtenido 14 puntos y Alianza 10. ¿Cuántos puntos tendrá que obtener Alianza para tener tanto puntos como la "U"?

10 + □ = 14

R: Tendrá que obtener 4 puntos más.

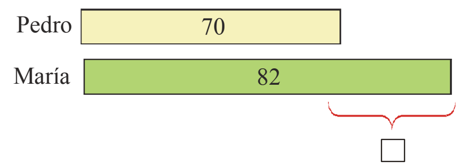
2) Igualación 2

El siguiente es un caso de igualación 2 y no de complemento sustractivo porque intervienen dos sujetos y no uno solo como en el problema 156.

Problema 182

Pedro tiene 70 kg y María 82 kg. ¿Cuántos kilogramos debe bajar María para tener tantos kilogramos como Pedro?

82 - □ = 70
□ = 12



R: María debe bajar 12 kg para igualar a Pedro.

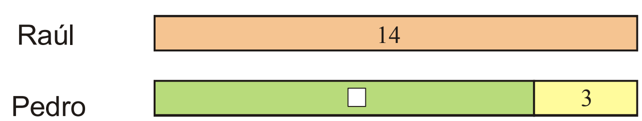
3) Igualación 3

En el siguiente problema preguntamos por la cantidad comparada teniendo como datos la cantidad de referencia y la diferencia, que deben ser igualadas en base a los términos “sacar más que” .

Problema 183

Raúl obtuvo 14 en el examen. Si Pedro hubiera sacado 3 puntos más habría obtenido el mismo calificativo que Raúl. ¿Qué nota obtuvo Pedro?

□ + 3 = 14
□ = 11



R: Pedro obtuvo 11.

En este caso muchos alumnos suman inducidos por los términos “sacar 3 puntos más”.

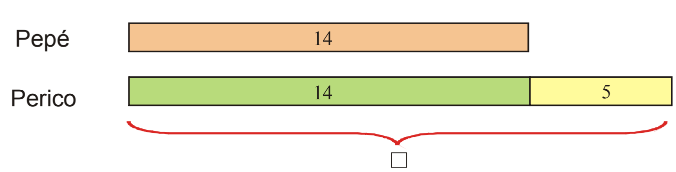
4) **Igualación 4**

Ahora preguntamos por la cantidad comparada, dada la cantidad de referencia y la diferencia en términos de “perder” para señalar la diferencia. En este caso, por el contrario muchos alumnos restarán inducidos por el término “perder”

Problema 184

Pepe ganó 14 canicas. Si Perico pierde 5, tendrá la misma cantidad que Pepe. ¿Cuántas canicas tiene Perico?

□ - 5 = 14
□ = 19



R: Perico tiene 19 canicas.

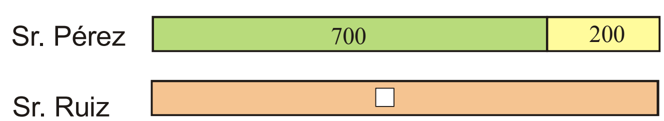
5) Igualación 5

En este caso se busca la cantidad de referencia, dada la cantidad comparada y la diferencia en términos de "ganar más" .

En particular el siguiente problema tiene cierta dificultad porque contiene el verbo en el futuro del subjuntivo "si x ganase y" como condición para que las cantidades se igualen pero en compensación el término ganar más induce a la suma.

> **Problema 185**
>
> En la tarjeta Bonus el Sr. Pérez tiene 700 puntos. Si el Sr. Pérez ganase 200 puntos tendría el mismo puntaje que el Sr. Ruiz. ¿Cuántos puntos tiene el Sr. Ruiz?

$700 + 200 = 900$



R: El Sr. Ruiz tiene 900 puntos.

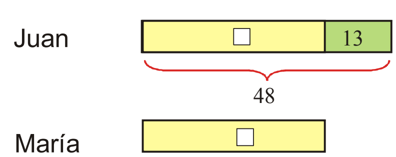
6) Igualación 6

Dada la cantidad comparada y la diferencia debemos hallar la cantidad de referencia. En este caso particular empleamos el subjuntivo con el concepto de "si x regalase y", lo cual dificulta el problema pero en compensación el término "regalar" induce a la resta.

> **Problema 186**
>
> Juan tiene 48 cartas. Si Juan regalase 13 tendría tantas cartas como tiene María. ¿Cuántas cartas tiene María?

$\square + 13 = 48$ o $48 - 13 = 35$

$\square = 35$



R: María tiene 35 cartas.

Con esto culminamos nuestra presentación sobre los significados en el campo aditivo. Hemos presentado los significados más comunes para las dos operaciones de adición y sustracción. En resumen tenemos:

1) Adición como cambio creciente o incremento
2) Adición como combinación o unión de dos o más conjuntos
3) Adición como comparación en base a la diferencia de dos cantidades
4) Adición como igualación en base a dos cantidades dadas
5) Sustracción como resto o cambio decreciente
6) Sustracción como combinación para determinar uno de los conjuntos dados
7) Sustracción como complemento aditivo o sustractivo
8) Sustracción como comparación en base a la diferencia entre dos cantidades
9) Sustracción como igualación en base a la diferencia entre dos cantidades

Estos son los significados más comunes. No todos los problemas del campo aditivo se pueden ubicar fácilmente en algunos de estos compartimientos. Hay, por ejemplo, problemas híbridos, que podríamos ubicar como participantes en dos categorías, porque en el reino del lenguaje las posibilidades de combinación de casos son innumerables.

Finalmente presentamos dos cuadros que ilustran los casos presentados de cambio y de comparación. La de igualación es semejante a la de comparación.

	Est inicial	Cambio	Est final	Crecer	Decrecer
Cambio 1	Dado	Dado	?	*	
Cambio 2	Dado	Dado	?		*
Cambio 3	Dado	?	Dado	*	
Cambio 4	Dado	?	Dado		*
Cambio 5	?	Dado	Dado	*	
Cambio 6	?	Dado	Dado		*

	Referencia	Comparada	Diferencia	Más	Menos
Comp 1	Dado	Dado	?	*	
Comp 2	Dado	Dado	?		*
Comp 3	Dado	?	Dado	*	
Comp 4	Dado	?	Dado		*
Comp 5	?	Dado	Dado	*	
Comp 6	?	Dado	Dado		*

Respecto a la dificultad de resolución, se puede decir según el estudio de Nesher, que estudió los aciertos en problemas de cambio, combinación y comparación con niños de 2º a 6º de primaria, que resultan más difíciles los problemas de cambio 5 (48%) y cambio 6 (49%), seguidos por los problemas de combinación 2 (52%) y comparación 6 (54%). Por el contrario resultan más sencillos los problemas de cambio 1 (82%) y combinación 1 (79%), así como también los problemas de comparación 1 (76%), cambio 2 (75%), cambio 3 (72%)y cambio 4 (77%). En fin, los maestros pueden hacer sus pruebas que pueden servir de guía para la instrucción por niveles.

5.2. Los significados y esquemas en el campo multiplicativo

Para iniciar nuestro estudio debemos considerar que el campo conceptual de las estructuras multiplicativas contiene los conceptos interconectados de multiplicación, división, fracción, razón, número racional, funciones lineales y multilineales, análisis dimensional y espacios vectoriales. Algunos de estos conceptos están fuera del ámbito escolar de un 5º y 6º grado pero no lo están si queremos analizar lo que realmente ocurre con la solución de estos problemas.

Para su estudio hemos consultado las siguientes fuentes citadas en la bibliografía:
Mónica Pena: “Clasificación de problemas multiplicativos” y “Problemas multiplicativos” en El problema.
Luis Puig: “Problemas de una etapa: multiplicación y división” en Problemas aritméticos escolares.
Carlos Maza: “Multiplicar y dividir: a través de la resolución de problemas.”

Llamamos problemas del campo multiplicativo a aquellos para cuya solución debe realizarse como operación principal alguna multiplicación o división o la combinación de ambas operaciones.

Aceptamos la clasificación de los problemas de multiplicación en 4 categorías:

5.2.1. Problemas de comparación
5.2.2. Problemas de proporcionalidad simple
5.2.3. Problemas de proporcionalidad simple compuesta
5.2.4. Problemas de proporcionalidad doble

5.2.1. Problemas de comparación

Los problemas de comparación expresan una relación de comparación numérica entre dos medidas que pertenecen a la misma magnitud. Se trata de una relación de escala porque una de las medidas tiene “n” veces más o “n” veces menos que la otra.

En la comparación multiplicativa son necesarios dos requisitos:

a) Se compara un solo tipo de magnitud.
b) La relación entre las dos medidas de la magnitud está claramente indicada.

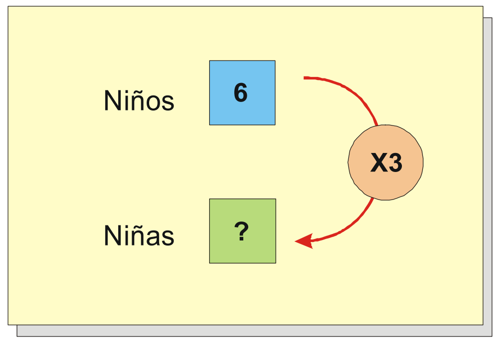
Así, tenemos dos casos de comparación: el 1º caso se da cuando la operación que necesitamos es la multiplicación y el 2º caso, si es de división.

a) Comparación de escala multiplicativa

Tenemos tres casos según busquemos el referente, el referido o la relación.
Veamos un problema donde se busca el referido.

Problema 187

En una clase hay 6 niños y el triple de niñas. ¿Cuántas niñas hay?



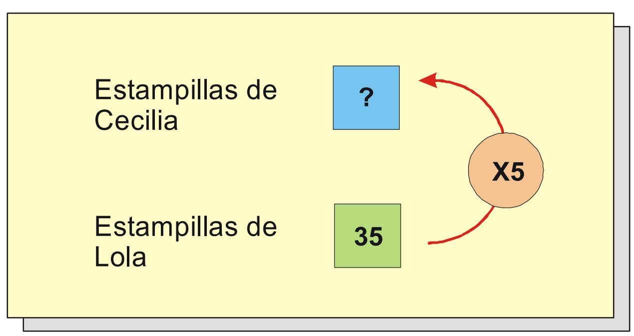
R: Hay 18 niñas

Veamos ahora el caso donde se busca el referente.

Problema 188

Cecilia colecciona estampillas. Lola tiene 35 estampillas que es 5 veces más de lo que reunió Cecilia ¿Cuántas estampillas reunió Cecilia?

Dibujamos el esquema:



□ x 5 = 35
□ = 7
R: Cecilia reunió 7 estampillas

Por último, tenemos el caso de la búsqueda de la relación:

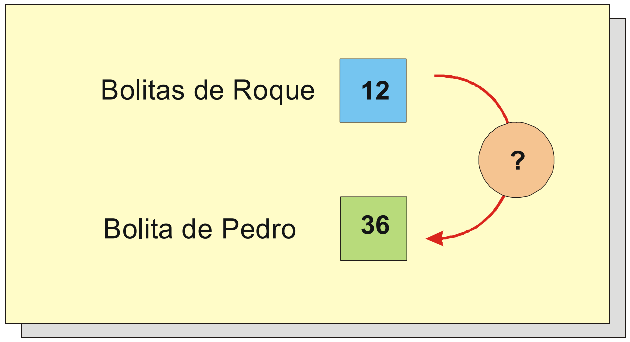
Problema 189

Roque tiene 12 bolitas y Pedro 36. ¿Cuántas veces más tiene Pedro que Roque?

Dibujamos el esquema de la relación:

$12 \times \square = 36$

$\square = 3$



R: Pedro tiene 3 veces más bolitas que Roque

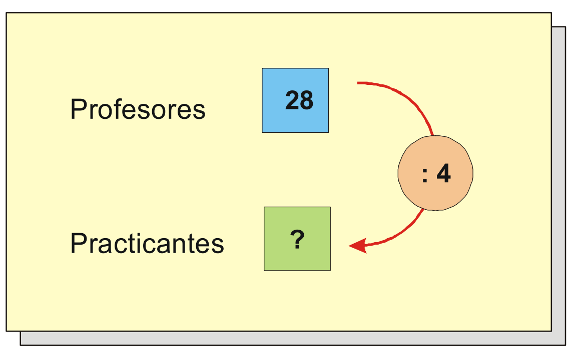
b) Comparación de escala por división

También aquí tenemos tres casos según busquemos el referente, el referido o la relación. Veamos el caso en que buscamos el referido.

Problema 190

A una reunión asistieron 28 profesores y la cuarta parte de practicantes. ¿Cuántos practicantes asistieron?

Dibujemos el esquema:



R: Hay 7 practicantes.

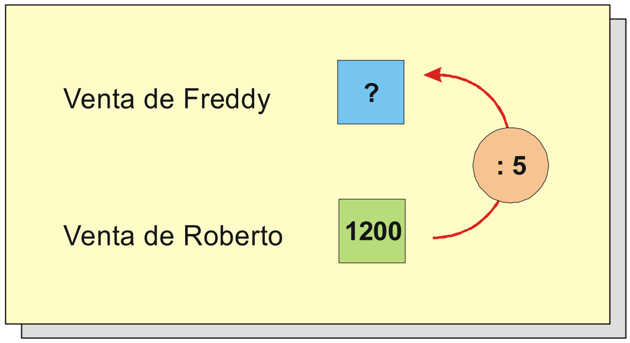
Veamos el caso en que se busca el referente:

Problema 191

Roberto vendió mercadería por $ 1200 que es un quinto de lo que vendió

Freddy. ¿Por cuánto vendió Freddy?

Dibujemos el esquema colocando la relación y el referido:



$\square : 5 = 1200$
$\square = 6\,000$

R: Freddy vendió mercadería por $ 6 000

Por último, veamos el caso en que se busca la relación:

Problema 192

Marilú obtuvo 18 puntos en su test y Sofía 6. ¿Cuántas veces menos tiene Sofía que Marilú?

Dibujemos el esquema colocando el referente y el referido y teniendo como incógnita la relación:

$18 : \square = 6$

$\square = 3$

R: Sofía tiene 3 veces menos puntos que Marilú o también Sofía tiene un tercio del puntaje de Marilú.
Este tipo de problemas también se denominan “escalares” y tradicionalmente han sido considerados como carentes de unidades. Pero en realidad las cantidades que se consideran pertenecen al mismo tipo de magnitud y operar sobre ellas multiplicando o dividiendo no cambia la naturaleza del referente o referido sino sólo su medida. Los ejemplos más simples son aquellos en que aparecen las palabras “doble” , “triple”, “mitad” y “tercia” o como hemos visto la palabra “veces”.

Conviene establecer un paralelismo entre la comparación en el campo aditivo y la comparación en el campo multiplicativo. En el campo aditivo el alumno aprende a hablar de “3 unidades más” o de “3 unidades menos”. En el campo multiplicativo, el alumno ahora distingue el término “3 veces más” o “ 3 veces menos” e incluso utiliza el vocabulario específico de triple o tercia.

Los casos de comparación son los menos usados en los problemas escolares y por eso los alumnos muestran una mayor dificultad en su resolución. No precisamente porque sean difíciles sino porque son poco usuales.

5.2.2. Problemas de proporcionalidad simple

Este caso nos muestra que no debería existir excesiva separación entre el estudio de la multiplicación y división y el estudio de la proporcionalidad.
Ilustremos los 4 casos que son:

a) Caso de la multiplicación con referencia a la unidad.
b) Caso de la división como reparto con referencia a la unidad.
c) Caso de la división como cuotición con referencia a la unidad.
d) Caso de proporcionalidad simple donde no se hace referencia a la unidad.

a) Caso 1: de la multiplicación con referencia a la unidad

Aquí tenemos el caso donde podemos presentar en primer lugar la idea de multiplicación como suma repetida.

Problema 193

Una bolsa de naranjas pesa 2,5 kg, ¿cuánto pesarán 4 bolsas iguales ?

2,5 + 2,5 + 2,5 + 2,5 =

2,5 x 4 = 10

R: 4 bolsas pesan 10 kg

En otros casos, podemos presentar una nueva idea de la multiplicación considerándola como un campo ordenado:

Problema 194

En una caja hay 4 filas y en cada una 5 chocolates. ¿Cuántos chocolates hay?

Representemos el campo ordenado como un arreglo de 4 filas de 5 unidades:

```
* * * * *
* * * * *
* * * * *
* * * * *
```

4 filas x 5 = 20

R: En la caja hay 20 chocolates.

b) Caso 2: de la división como reparto con referencia a la unidad

Vamos a analizar en primer lugar el caso en que se entiende la división como reparto de unidades en grupos.

Problema 195

La Unidad Educativa tiene 480 libros de lectura para repartir a 12 escuelas por igual. ¿Cuántos libros recibirá cada escuela?

480 : 12 = 40

R: Cada escuela recibirá 40 libros.

c) Caso 3: de la división como cuotición con referencia a la unidad

Ahora veamos el caso en que se entiende la división como búsqueda del número de grupos que se forman al hacer el reparto:

Problema 196

La Unidad Educativa tiene 480 libros y entrega 40 libros a cada escuela. ¿Para cuántas escuelas le alcanza?

480 : 40 = 12

R: Le alcanza para 12 escuelas.

d) Caso 4: en que el enunciado no hace referencia a la unidad y puede ser considerado de proporcionalidad.

Problema 197

Pagué \$ 24 por 6 panecillos. ¿Cuánto me costarían 8 panecillos del mismo precio?

En este caso, en que no se hace referencia a la unidad, basta determinar el precio por cada unidad para luego hallar el precio del total de unidades solicitadas:

(24 : 6) x 8 =
4 x 8 = 32

R: Ocho panecillos me costarían \$ 32.

Sin embargo debemos advertir que hay una diferencia cuando el caso es de proporcionalidad simple e inversa, como ya advertimos cuando trabajamos las estrategias aplicables a la proporcionalidad.

Analicemos un problema de proporcionalidad inversa para recalcar la diferencia y ver que se trata de un problema de proporcionalidad doble y no simple:

Problema 198

Si 30 obreros hacen una obra en 6 días, ¿cuántos días tardarán en hacer la obra 10 obreros?

En este caso debemos buscar los obreros/días que demora la obra y dividirlos entre los 10 obreros que participarán:

(30 · 6) : 10 =
180 : 10 = 18

R: Los 10 obreros tardarán 18 días en hacer la obra.

Por tanto, la proporcionalidad inversa no es un caso de proporcionalidad simple sino un caso de proporcionalidad doble, en el cual se crea al multiplicar dos magnitudes, tales como obreros y días, una nueva: trabajo de obreros/días.

En algunos casos, esta nueva unidad puede ser trabajo de obreros/días, de máquinas/días, o puede ser consumo/meses, costo/días, producción/días, etc… En general se trata de dos magnitudes que al multiplicarse generan un nueva magnitud. Los casos más sencillos son aquellos en que la magnitud producto es 1 Por ejemplo, al combinar hombre/mujer, surge la magnitud pareja o al multiplicar metro por metro surge la magnitud metro cuadrado.

5.2.3. Problemas de proporcionalidad simple compuesta.

En este caso entran 3 elementos o 3 magnitudes que se apoyan en cadena.
Veamos el caso de los 3 elementos:

Problema 199

Dibujé un árbol con 3 ramas. En cada rama coloqué 4 ramitas y en cada ramita 2 hojitas. ¿Cuántas hojitas tenía el árbol?

Pensamos que si cada una de las 3 ramas tiene 4 ramitas, hay 12 ramitas en total y si cada ramita tiene 2 hojitas entonces tenemos el encadenamiento siguiente:

3 x 4 x 2 =
12 x 2 = 24

R: El árbol tenía 24 hojitas.

La estructura formal es muy simple a x b x c = □ pero más adelante, la semántica puede incluir magnitudes muy variadas. Por ejemplo, el peso y el precio de las unidades mencionadas. Por lo tanto esta primera estructura simple debe ser bien asimilada, si es posible con dibujos, donde se representen simbólicamente los elementos mencionados. Conviene trabajar así con el niño de 3º grado para que en el 4º grado pueda resolver problemas que incluyan las diversas magnitudes, así como también la búsqueda de los otros elementos.

Veamos un problema, donde dados dos elementos de la cadena y el total de unidades, debemos encontrar uno de los elementos. Tal problema tiene la estructura formal de □ x b x c = d

Problema 200

Marco ha dibujado un árbol con varias ramas. A cada rama le dibujó 4 ramitas y en cada ramita colocó 2 hojitas. Si en total dibujó 24 hojitas, ¿cuántas ramas tenía su árbol?

□ x 4 x 2 = 24
□ x 8 = 24
□ = 3

R: Su árbol tenía 3 ramas.

En el siguiente caso la estructura formal presenta como incógnita otro de los elementos de la cadena y así tenemos: a x □ x c = d

Problema 201

Marco ha dibujado un árbol con 4 ramas. A cada rama le dibujó unas ramitas y en cada ramita colocó 2 hojitas. Si en total dibujó 40 hojitas, ¿cuántas ramitas tenía su árbol?

4 x □ x 2 = 40
4 x 2 x □ = 40
8 x □ = 40
□ = 5

R: Su árbol tenía 5 ramitas

Como señalamos en el caso de encadenamiento podemos considerar diversas unidades y magnitudes, especialmente número de cajas y unidades por caja en relación al precio. Veamos un problema típico de encadenamiento:

Problema 202

En una bodega se ponen a la venta 25 cajas de besos de moza. Cada caja contiene 12 unidades y cada una se vende en $ 4. ¿En cuánto se venderán las 25 cajas?

25 x 12 x 4 = □
(25 x 4) x 12
100 x 12 = 1 200

R: Las 25 cajas se venderán en $ 1 200.

En este problema entran tres magnitudes que se encadenan al igual que en el caso del árbol:

Nº de cajas	1	25
Nº total de unidades	12	300
Precio por unidad	4	1200

En esta tabla pensamos que si tenemos 25 cajas y en cada caja hay 12 unidades, en total tenemos 300 unidades, que al precio de $ 4 por unidad, nos dan un total de $ 1 200. También podría resolverse buscando el precio de cada caja y luego multiplicando por el total de cajas:

(12 x 4) x 25 =
48 x 25 = 1200

R: Las 25 cajas se venderán en $ 1200.

Algunas veces los problemas de encadenamiento requieren procesos de multiplicación y división para su resolución. Veamos algunos casos más, donde las incógnitas pueden hallarse colocando los datos en una tabla.

Problema 203

En la bodega hay 12 cajas de jabones. En cada caja vienen 10 jabones. El bodeguero calculó que había vendido todos los jabones en $ 480. ¿A qué preció vendió cada jabón?

En este caso podemos usar la estrategia de la tabla:

Nº de cajas	1 caja	12 cajas
Nº total de jabones	10 unidades	**?**
Precio por unidad y total	**?**	480

En resumen, pensamos que si 10 cajas tienen 10 x 12 jabones, al recaudar $ 480 hemos vendido cada unidad en $ 4:
480 : (12 x 10) =
480 : 120 = 4

R: Vendió cada jabón a $ 4.

Pero este problema resulta aún más sencillo con el esquema del árbol:

$12 \times 10 \times \square = 480$
$120 \times \square = 480$
$\square = 4$

Un caso similar tenemos en el siguiente problema:

Problema 204

Para repartir chocolates a sus alumnos una escuela compró varias bolsas de chocolates gastando $ 720 en total. Cada unidad costó $ 2 y cada bolsa contenía 24 chocolates. ¿Cuántas bolsas compró?

Con el esquema del árbol resulta sumamente fácil:

$24 \times \square \times 2 = 720$
$48 \times \square = 720$

□ = 15

R: Compró 15 bolsas.
Pero también podemos recurrir a la estrategia de completar la tabla:

Nº de bolsas	1 bolsa	?
Nº total de unidades	24	?
Precio por unidad y total	2	720

En resumen, pensamos que al pagar $ 720 por chocolates de $ 2, hemos comprado 360 chocolates y si los repartimos de modo que cada bolsa tenga 24 tendremos el número de chocolates:

(720: 2) : 24 =
360 : 24 = 15

R: La escuela compró 15 bolsas de chocolates.

Pero en este tipo de problema todavía cabe preguntarnos por el número de unidades por envase.

Problema 205

Una envasadora de espárragos ha preparado 400 cajas con 200 000 espárragos. Estos espárragos están envasados en frascos. Cada caja contiene 50 frascos. ¿Cuántos espárragos contiene cada frasco?

Aquí podemos también aplicar la estrategia del árbol, sabiendo que:

n° de espárragos por frasco x n° de frascos por caja x n° de cajas = n° total de espárragos

□ x 50 x 400 = 200 000
□ x 20 000 = 200 000
□ = 10

R: Cada frasco contiene 10 espárragos.

Apliquemos la estrategia de la tabla para colocar los datos y relacionarlos:

Nº de cajas	1 caja	400 cajas
Nº total de frascos	50	?
Nº de cada frasco y total de espárragos	?	200 000

Pensamos que si hay 400 cajas y cada una tiene 50 frascos debe haber 20 000 frascos y si en total hay 200 000 espárragos, entonces hay 10 espárragos en cada frasco.

El encadenamiento también puede ser múltiple como en el caso de las recetas. Los teóricos presentan este tipo de problema en una tabla, donde deben completarse el número que corresponde a los ingredientes. Veamos uno:

Problema 206

Postre de manzana					
Número de Personas	Número de manzanas	Cuch leche condensada	Número de yemas	Cuch de vainilla	Cuch crema de cacao
4	4	6	2	3	1
2					
6					
			8		

En este caso se razona por analogía, si para 4 personas necesito 4 manzanas, para 2 necesitaré 2 y para 6, 6 manzanas. Del mismo modo si para 4 personas necesito 6 cucharadas de leche condensada, para 2, necesitaré 3 y para 6, 9 cucharadas. Si para 4 personas necesito 2 yemas, para 2 necesito una sola y para 6, necesito 3 y así sucesivamente con los demás casos e ingredientes.

Con frecuencia también podemos encontrar tablas diseñadas con los datos en cada fila como en este problema:

Problema 207

El consumo de 5 m^3 cuesta \$ 5,50 y por cada metro cúbico se paga \$ 0.05 de impuesto. Completa la tabla para aclarar el gasto por las cantidades señaladas.

Consumo en m^3	1	3	5	7	10
Precio en \$ por m^3			5,50		
Impuesto por m^3	0,05				

Igualmente razonando por analogía tenemos, si por 5 m^3 pagamos \$ 5,50 por un metro cúbico pagaremos \$ 1,10 y por 3, tres veces más, por 7, 7 veces más, etc… Del mismo modo, si por \$ 1,10 se paga \$ 0,05, por 3 se pagará, 3 veces más y así sucesivamente.

Como vemos, estos casos en que las operaciones de multiplicación y división se encadenan nos permiten relacionar aún más la multiplicación con la proporcionalidad, que está presente, desde que se hace mención expresa de la unidad. En este caso de encadenamiento la proporción simple puede darse entre 3, 4 o más variables y como ya hemos visto, según el caso a determinar podemos distinguir diversos casos de proporcionalidad simple compuesta por encadenamiento.

Pero ahora nos toca analizar un caso especial en que la proporcionalidad relaciona dos tipos de magnitud que están en juego para dar lugar a una nueva magnitud. Llamamos a este tipo de proporcionalidad doble porque la relación en el campo multiplicativo da origen a una nueva entidad.

5.2.4. Problemas de proporcionalidad doble.

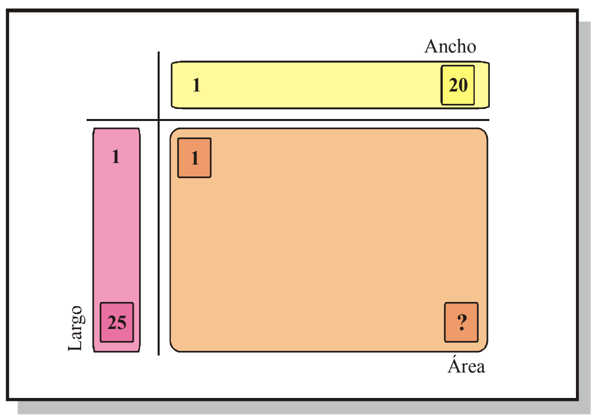
Como ya lo expresamos en este caso se combinan dos magnitudes para formar la magnitud producto. Nesher[6] llama a esta categoría semántica "multiplicación cartesiana" porque efectivamente el caso corresponde al producto cartesiano que se obtiene al multiplicar dos magnitudes para obtener una nueva. El caso más común es el de dos longitudes, largo y ancho que se combinan para formar el área. También son usuales las combinaciones de falda y saco para formar un vestido llamado "sastre" o dos personas de distinto sexo para formar parejas.
Al hablar de proporcionalidad doble distinguimos dos clases:

a) Caso 1 : en que la magnitud producto es 1.
b) Caso 2 : en que la magnitud producto es diferente de 1.

a) Caso 1: En que la magnitud producto es 1.

Problema 208

Un terreno rectangular mide 25 m de largo y 20 m de ancho. ¿Cuál es su área?



$25 \text{ m} \times 20 \text{ m} = 500 \text{ m}^2$

R: El área es de 500 m^2

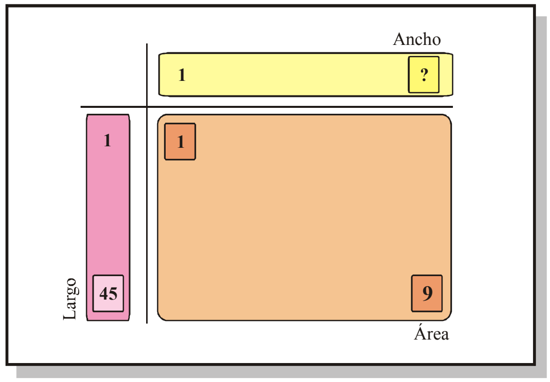
Como hemos apreciado el producto da lugar a una nueva magnitud que en este caso se entiende como el metro cuadrado y en particular tenemos que 1 m de ancho por 1 m de largo da lugar a 1 m^2. de área.

Veamos ahora el caso en que preguntamos por el ancho:

Problema 209

[6] Nesher, P. "The stereotyped Nature of School Word Problems" For the learning of Mathematics. Vol 1 (41-48) USA, 1980

Una mesa tiene 450 cm de largo y 9 m^2 de área. ¿Cuál es su ancho?



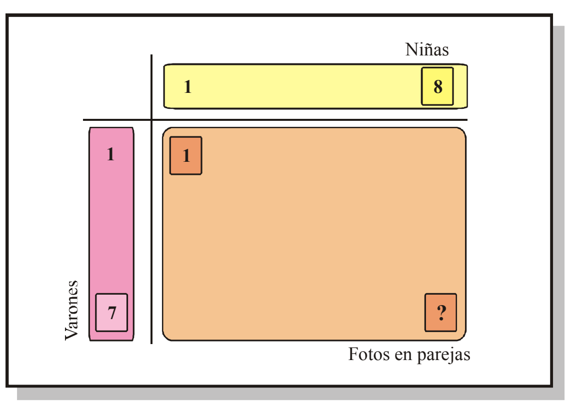
450 cm = 4,5 m
Área = largo x ancho
9 = 4,5 x □
□ = 9 : 4,5
□ = 2

R: El ancho es de 2 m

Pasemos a considerar otro tipo de problemas donde el producto de la magnitud es 1. Se trata del problema que combina un niño y una niña para formar parejas. Veamos esta versión.

Problema 210

Ocho niñas y siete varones están posando para sacarse una foto en pareja para la fiesta de San Valentín. ¿Cuántas fotos diferentes pueden tomarse?

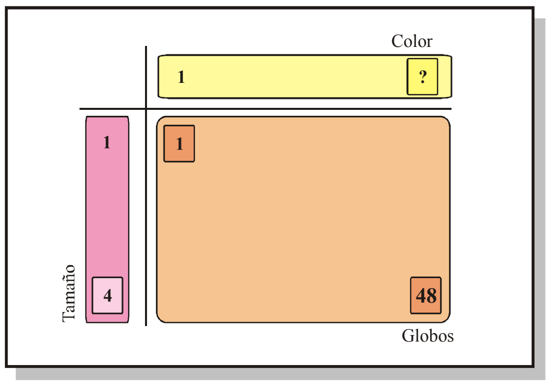


8 x 7 = 56

R: Se pueden tomar hasta 56 fotos con parejas diferentes.
Podemos relacionar también diversos tipos de adornos con magnitudes diferentes y obtener combinaciones de color/tamaño, color/forma, tamaño/forma, etc…En este problema preguntamos por una de las magnitudes de la relación.

Problema 211

Para decorar el árbol de Navidad, Carlos utilizó 48 globos diferentes considerando el color y el tamaño. Los globos tenían cuatro tamaños diferentes, ¿Cuántos colores diferentes tenían?



$\square$ x 4 = 48
$\square$ = 12

R: Se combinaron 12 colores.

Es interesante con el mismo problema, buscar la nueva magnitud y luego uno de los componentes, como en estos dos problemas.

Problema 212

En un restaurant se ofrece un menú compuesto por plato de fondo y postre. Como plato de fondo hay 4 opciones: tallarines con tuco, milanesa con papas, asado con puré y pescado con arroz. Como postre hay 3 opciones: mazamorra morada, arroz con leche y gelatina. ¿Cuántos menús diferentes se ofrecen?

Problema 213

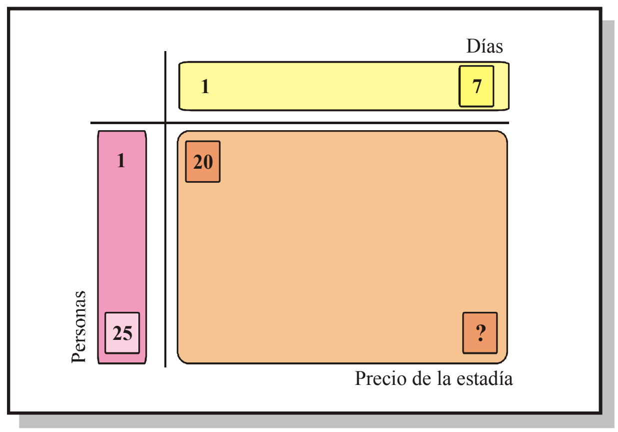
Unos amigos acuden a cenar a un restaurant, donde ofrecen menú con un plato de fondo y un postre. Como plato de fondo hay 4 opciones. Si ellos señalan que son 12 menús diferentes, ¿cuántas opciones se ofrecen para el postre?

b) Caso 2: en que la magnitud producto es diferente de 1.

Veamos el caso en que la magnitud producto tiene un valor diferente de 1. Tal es el caso de la magnitud costo por día (costo/día) que se usa en los hoteles

Problema 214

En un hotel se hospedan 25 personas durante 7 días. Si el costo por día y por persona es de \$ 20, ¿cuánto pagarán en total?



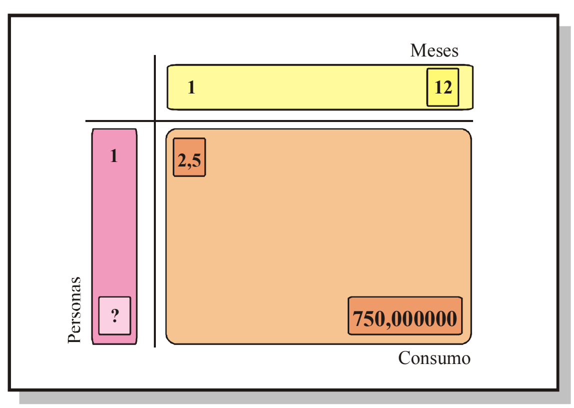
25 x 20 x 7 =
500 x 7 = 3500

R: Pagarán \$ 3 500.

Ahora analicemos la unidad: kilogramos de consumo de alimentos por mes. En este caso la unidad formada sería consumo/mes y buscaríamos uno de los componentes, la población.

Problema 215

En un país el consumo mensual de pescado es de 2,5 kg por persona. Si el consumo total es de 750 000 000 kg de pescado en 12 meses, ¿cuál es la población del país?

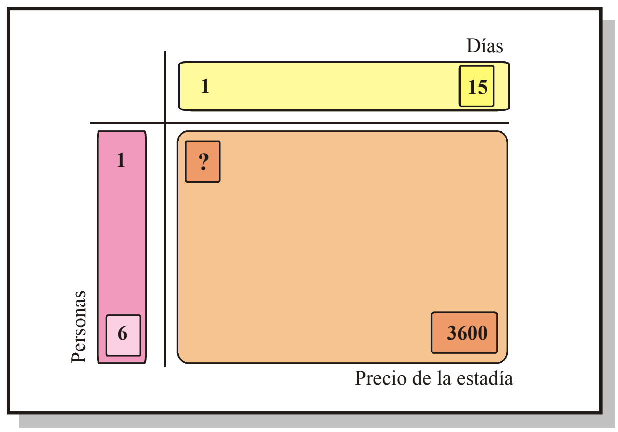


2,5 x 12 x □ = 750 000 000
30 x □ = 750 000 000
□ = 25 000 000

R : El país tendría 25 000 000 de habitantes.
Regresemos ahora al costo/día por hospedaje para preguntar por el valor de esta nueva unidad.

Problema 216

Una familia de 6 integrantes se hospeda 15 días en un hotel pagando $ 3600 ¿Cuál es el costo/día por persona?



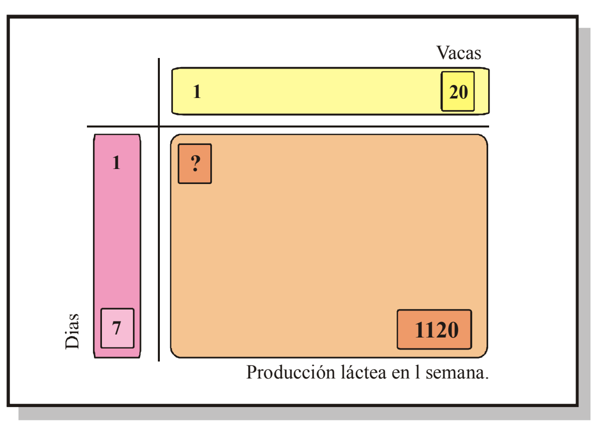
6 x □ x 15 = 3 600
6 x 15 x □ = 3 600
90 x □ = 3600
□ = 40

R: El costo/día por persona es de $ 40.

Trabajamos ahora con la unidad producción láctea por día:

Problema 217

En una hacienda hay 20 vacas que producen 1 120 litros en una semana. ¿Cuál es la producción promedial láctea por día?



20 x □ x 7 = 1120
140 x □ = 1120
□ = 8

R: La producción promedial láctea es de 8 litros por día.

5.2.5. Los casos singulares

Con la multiplicación como producto cartesiano, terminamos con la presentación de los significados usuales del campo multiplicativo que actualmente se han estudiado, porque como debemos reconocer, el campo multiplicativo aún no ha sido exhaustivamente investigado, como lo ha sido el campo aditivo. Sin embargo, debemos anotar que hay ocasiones donde el problema representa un caso singular y resulta difícil de clasificar con las categorías de las cuales actualmente disponemos.

Hay otros casos en los cuales el problema tiene varias opciones. Por ejemplo, un problema muy común como el siguiente, puede ser traducido como un problema de diferencia o como un problema de multiplicación con referencia a la unidad puesto que se amolda a ser trabajado por ambas opciones debido a que responde a la estructura de la propiedad distributiva, en este caso de la multiplicación sobre la sustracción.

$(a \cdot c) - (b \cdot c) = (a - b) \cdot c$

Problema 218

Un comerciante compra 12 camisas a $ 30 cada una. Si las vende a $ 40, ¿cuánto dinero ganó?

Si lo entendiésemos como un problema de **diferencia** entre venta y costo, sería un problema de sustracción y lo traduciríamos así:

$(12 \times 40) - (12 \times 30) =$
$480 - 360 = 120$

R: El comerciante ganó $ 120.

Si lo entendiésemos como un problema de **multiplicación iterativa** o con referencia a la unidad, buscaríamos determinar la ganancia en una camisa y repetirla por el número de camisas vendido, y sería un problema de multiplicación y lo traduciríamos así:

$(40 - 30) \times 12 =$
$10 \times 12 = 120$

Lo mismo podía plantearse con un problema que se amoldase a la distribución de la multiplicación sobre la suma o a la distribución de la división sobre la suma o resta. En esos casos las estructuras serían:

$(a \cdot c) + (b \cdot c) = (a + b) \cdot c$

(a : c) + (b : c) = (a + b) : c
(a : c) - (b : c) = (a – b) : c

Vamos ahora a mostrar otro caso especial, modificando ligeramente el problema 40 que presentamos cuando ilustramos las estrategias. Con éste, tenemos un caso que ciertamente se puede resolver utilizando el concepto de división como partición pero por la propiedad distributiva también se puede entender como un caso de diferencia y de hecho, he observado que así lo resuelven muchos niños.

Problema 219

Una escuela de dos pisos tiene un total de 56 aulas, pero en el primer piso tiene 14 aulas más que en el segundo. ¿Cuántas aulas tiene en el segundo piso?

En el caso de entenderlo como división partitiva tenemos:

(56 – 14) : 2 =
42 : 2 = 21

R : En el segundo piso tiene 21 aulas.

Igualmente, en el caso de entenderlo como uno de los dos términos de una diferencia tenemos exactamente la misma respuesta:

(56 : 2) - (14 : 2) =
28 – 7 = 21

Sin embargo, la solución aritmética más simple a este problema es la que apela al complemento aditivo:
$\square + \square + 14 = 56$
$2 \cdot \square = 56 - 14$
$2 \cdot \square = 42$
$\square = 21$

Obviamente esta solución más tarde se transforma en una solución algebraica y los alumnos aprenden a resolverla bajo el concepto de ecuaciones de primer grado con una incógnita:

Teniendo en cuenta que:
1º piso = a + 14
2º piso = a

a + (a + 14) = 56
a + a + 14 = 56
2 a + 14 = 56 // -14
2 a = 42 // : 2
a = 21

Evidentemente el álgebra simplifica el razonamiento a través del manejo simbólico, pero es necesario trabajar el razonamiento aritmético previamente.
Por último, hay casos en que un problema podría ser trabajado como complemento o como resto, pero en la determinación del resultado interviene de forma decisiva la división como cuotición. De hecho la misma pregunta resalta el papel decisivo de la división como cuotición y el hecho de que la pregunta previa nos lleve a determinar un **resto**, es cuestión secundaria.

Problema 220

En una sastrería se tienen 4 piezas de tela de 25 m cada una. Con ellas se va a hacer 10 uniformes de 4 m cada uno. Con el **resto** se van a confeccionar abrigos de 3 m cada uno. ¿Para cuántos abrigos alcanzará la tela?

Este problema puede entenderse como resto, determinado el cual es necesario averiguar cuantas veces en el resto están los 3 m de cada abrigo:

(4 x 25) – (4 x 10) = 3 x □
100 – 40 = 3 x □
60 = 3 x □
□ = 60 : 3 = 20

R : El resto de la tela alcanzará para 20 abrigos.

Pero también se puede entender como complemento considerando el total de la tela como la unidad a completar y en este caso podemos utilizar el concepto de la multiplicación iterativa:

(4 x 10) + (3 x □)= 4 x 25
40 + (3 x □) = 100
3 x □ = 60

R: Con lo que me falta para usar el total de tela puedo hacer 20 abrigos.

El último ejemplo pone de relieve la unidad del campo multiplicativo pues fácilmente con el complemento podemos resolver un problema de división como un problema de multiplicación. Por esta razón, en muchos casos, no podemos distinguir tan fácilmente los significados de la multiplicación de los de la división y por esto es tan difícil plantear esquemas rígidos en este campo.

Con todas estas dificultades, nuestro intento de clasificar los problemas del campo multiplicativo no ha sido vano, en cuanto hemos planteado un esquema para que el futuro profesor aborde los diversos tipos de problemas como parte del desarrollo del currículo y colabore, de este modo, al enriquecimiento del pensamiento lógico-matemático del estudiante. Porque desde luego no se trata que el escolar aprenda a clasificar los problemas sino que el profesor aprenda a presentarle las múltiples variedades de problemas y aún otras más, para desarrollar su sentido estratégico y su capacidad de análisis crítico.

Capítulo VI
Metodología de la Investigación

6.1 Tipo de estudio de investigación y población

El método que a través de los capítulos precedentes hemos explicado paso a paso y fundamentado ha sido desarrollado en el curso "Didáctica de la matemática III" con los alumnos de pre-grado de las Bases 2002 y 2003 de la especialidad de Primaria de la EAP de la Facultad de Educación de la UNMSM y nos corresponde ahora en este capítulo, explicar la metodología con la cual vamos a investigar los resultados de su aplicación y determinar su grado de influencia en el rendimiento de nuestros alumnos en la resolución de problemas.

6.1.1 Tipo de estudio de investigación

Para lograrlo, hemos planteado un estudio de investigación de tipo transversal, pues las mediciones del rendimiento se observan en un solo momento. Asimismo, esta investigación conserva el carácter descriptivo – exploratorio, pues el tratado se lleva a cabo con toda la población de estudiantes matriculados en "Didáctica de la matemática III" en los ciclos de Pre-grado de la especialidad de Educación Primaria de la UNMSM de las Bases 2002 y 2003, con 51 estudiantes regulares de colegio de los grados 5° y 6° de primaria y con un grupo de 72 estudiantes de la UNE EGV

El diseño del estudio es experimental, pues se compara el rendimiento de los estudiantes de la UNMSM a través de una prueba pre-test al iniciar el curso "Didáctica de la Matemática III" y al concluirlo, se aplica el post-test, para medir el efecto del curso y específicamente, su impacto sobre el rendimiento en la resolución de problemas.

Por otro lado, se compara el resultado de los estudiantes de la UNMSM que formaron el grupo experimental y que han recibido la experiencia de la clase impartida, con el grupo de control que no la recibió, formado por los estudiantes de la UNE-EGV.

Dado que el propósito, es evaluar el impacto del rendimiento en la resolución de problemas de matemáticas en estudiantes de Pre grado de la Especialidad de Primaria de la UNMSM, por comparación con los estudiantes de la Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle de la misma especialidad, se ha previsto la aplicación de un instrumento que identifique las capacidades para establecer, manejar y resolver problemas matemáticos, considerando nueve factores seleccionados para determinar el grado de eficiencia.

6.2.2. Población

Participaron tres grupos con un total de 166 estudiantes:

a) 72 alumnos de los ciclos 7º y 9º de la Facultad de Educación de la "Universidad Enrique Guzmán y Valle", Especialidad de Primaria
b) 43 alumnos de los ciclos 7º y 10º de la Facultad de Educación de la "Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Especialidad de Primaria.
c) 51 estudiantes de 5º y 6º grado del Colegio Peruano-Alemán Alexander von Humboldt.

Los 72 estudiantes de la UNEGV actuaron como grupo de control para probar por contraste la eficacia del método. Este grupo no recibió nuestro curso y por esa razón no le aplicamos la prueba pre-test sino solamente el post-test. Sin embargo ellos, como todo estudiante de la Especialidad de Primaria, habían recibido cursos de Didáctica de la Matemática en general. Según comprobamos, se trataba de cursos en los cuales se había trabajado superficialmente los conceptos matemáticos, no se había insistido en el método de cálculo mental y no se había puesto énfasis en el desarrollo de problemas. Los alumnos manifestaron que en sus dos cursos sobre el tema se concedió gran importancia a la elaboración manual de material didáctico para la enseñanza de la matemática, asunto en el cual adquirieron cierta pericia, pero que nosotros no evaluamos por no ser pertinente para nuestra investigación sobre el método problémico. También manifestaron que se concedió importancia al desarrollo del currículo escolar de los primeros grados pero no específicamente al 5º y 6º grado, razón por la cual, nuestro examen fue resuelto en base a lo que ellos aprendieron tanto en un curso general de matemática como en los conocimientos matemáticos adquiridos antes de ingresar a la universidad.

Los 43 alumnos de la UNMSM actuaron como grupo experimental para probar la eficacia del método en los alumnos universitarios de la Especialidad de Primaria. Aunque ellos no son un grupo muy numeroso, ellos constituyen toda la población que ha llevado los cursos completos de "Didáctica de la matemática" con nuestro enfoque, en la Facultad de Educación de la UNMSM. Tenemos alrededor de 20 alumnos de las bases 2003 y 2004 que no pudieron participar porque no se matricularon oportunamente en el curso III, unos por problema de horario y otros por problemas del currículo, en consecuencia no llevaron el curso "Didáctica III" y por tal razón fueron excluidos del estudio de investigación. Si hubiéramos contado con su participación hubiéramos tenido alrededor de 63 alumnos.

Los 51 alumnos del Colegio Humboldt actuaron como grupo experimental para probar que los problemas de la prueba propuesta no exceden un nivel ideal de 5º y 6º grado. Su participación de paso ha demostrado que si el método problémico para 5º y 6º se aplicase a nivel escolar en forma continua a lo largo de dos años tendría un efecto similar que si se aplicase a lo largo de un semestre a los alumnos pre-universitarios. Vale decir que las lecciones que los niños tardan dos años en asimilar pueden ser asimiladas por los estudiantes de pre-grado en 4 meses.

6.2 Operacionalización de variables

Cada pregunta (ítem) fue evaluada según las respuestas que se categorizaron dicotómicamente, es decir, en dos categorías: "respuesta correcta" (codificado con 1) y "respuesta incorrecta" (codificado con 0).

Luego se evaluaron el método y estrategias empleados en la resolución de los mismos problemas planteados, bajo la misma categorización señalada.

Por último, se operacionalizaron las principales variables que intervinieron en el análisis del rendimiento, indicándose la escala de medida y el tipo de variables que se resume en la tabla siguiente.

Tabla Nº 01: Operacionalización de las variables

Itemes a estudiar	Descripción de las variables	Nombre de variables	Escala de medida	Tipo de variable
60	Cada pregunta desde la primera hasta la sesenta (I = correcta, 0 = incorrecta)	P1_RL a P60_CPORC	Nominal	Cualitativa
5	Método sobre capacidad de establecer relaciones lógicas	Suma de P1_RL a P5_RL	Escalar numérico	Cuantitativa discreta
18	Método sobre capacidad de establecer relaciones aritméticas simples	Suma de P6_RAS a P23_RAS	Escalar numérico	Cuantitativa discreta
3	Método sobre capacidad de resolver problemas con los conceptos del MCD y MCM	Suma de P24_MCD_MCM a P26_MCD_MCM	Escalar numérico	Cuantitativa discreta
4	Método sobre capacidad de manejar la terminología técnica de las cuatro operaciones	Suma de P27_4OP a P30_4OP	Escalar numérico	Cuantitativa discreta
10	Método sobre capacidad de establecer el perímetro y el área del cuadrado y del rectángulo	Suma de P31_PERIM a P40_PERIM	Escalar numérico	Cuantitativa discreta
6	Método sobre capacidad de trabajar el concepto de fracción con el uso de operadores	Suma de P41_CFR a P46_CFR	Escalar numérico	Cuantitativa discreta
4	Método sobre capacidad de manejar problemas con decimales	Suma de P47_PDEC a P50_PDEC	Escalar numérico	Cuantitativa discreta
4	Método sobre capacidad de establecer proporciones	Suma de P51_PROP a P54_PROP	Escalar numérico	Cuantitativa discreta
6	Método sobre capacidad de manejar el concepto de porcentaje	Suma de P55_CPORC a P60_CPORC	Escalar numérico	Cuantitativa discreta
1	Puntaje total de la prueba	Suma total de P1_RL a P60_CPORC	Escalar numérico	Cuantitativa discreta
	Centro de Estudios	1=UNMSM, 2=UNEEGV; 3=HUMBOLDT	Nominal	Cualitativa
	Ciclos de estudios		Nominal	Cualitativa
	Tipo de Prueba	1= Pre test 2= Post test	Nominal	Cualitativa
	Método a evaluar	1 = Respuestas 2 = Método y estrategias	Nominal	Cualitativa

6.3 Estrategia para la prueba de hipótesis

6.3.1. Prueba de hipótesis para datos apareados

Se desea evaluar el rendimiento de la prueba de razonamiento, para establecer el impacto sobre la resolución de problemas de matemática, tomando la mencionada prueba en un mismo grupo de estudiantes de la especialidad de Primaria de la UNMSM, en dos momentos, antes y después de aplicar el curso de “Didáctica de la Matemática

III", focalizado en estrategias didácticas de resolución de problemas de matemática para 5º y 6º grado. Es decir, que se tiene un diseño experimental, donde las unidades de análisis están naturalmente apareadas en la pruebas pre-test y post test, según los estudiantes participantes.

Para probar la existencia de diferencias en cuanto al efecto del rendimiento en la prueba se postula lo siguiente:

Hipótesis nula:

No existen diferencias en el rendimiento de la prueba de razonamiento matemático bajo el puntaje total obtenido en la resolución de problemas

Hipótesis alternativa:

Existen diferencias en el rendimiento de la prueba de razonamiento matemático bajo el puntaje total obtenido en la resolución de problemas

Para probar la hipótesis se utiliza la estadística T – Student para el test T con datos apareados, que se basa en n – 1 grados de libertad, (donde n es el número de estudiantes a evaluar), considerando un nivel del 5% de significación ($\alpha = 0.05$). Rechazamos la Hipótesis nula ("Ho"), si el valor de la prueba T calculado, p valor, excede en magnitud absoluta al valor crítico obtenido.($p > 0.05$).

6.3.2. Prueba del Análisis de Varianza (ANOVA)

Las técnicas englobadas bajo la denominación de análisis de la varianza o abreviadamente ANOVA (del inglés Analysis of variance) fueron introducidas por R.A. Fisher en 1925, y el análisis de la varianza casi siempre se hace como respuesta a la necesidad de utilizar una técnica de comparación donde intervienen más de dos grupos.

En realidad, lo que se quiere comprobar es: si todas las muestras obtenidas para cada grupo proceden de una misma población, es decir, si el rendimiento medio en la prueba de razonamiento tiene el mismo efecto en todos los centros de estudios participantes. Esta técnica se aplica comparando las medias de los tres grupos de estudio.

En el planteamiento más simple de análisis de la varianza, tenemos una variable numérica cuantitativa (rendimiento observado en la prueba), y queremos determinar en qué medida se puede atribuir la variabilidad de ésta a otra variable cualitativa nominal que vamos a denominar factor (Centro de Estudios). Estamos hablando por tanto, de análisis de la varianza para un solo factor con tres categorías o niveles.

Para poder aplicar esta metodología deben cumplirse los siguientes supuestos teóricos:

- Los estudiantes de cada centro de estudios son independientes.
- Se supone que los errores experimentales se distribuyen normalmente. Para comprobar la normalidad se aplicará la prueba de Kolmogorov-Smirnov
- Existe homogeneidad de varianzas calculadas.

Sean los tres centros de estudios
k = 3 (1 = UNMSM, 2 = UNE-EGV, 3 = Colegio Humboldt).

Sean los estudiantes seleccionados independientemente y obtenidos en forma aleatoria

n1 = 53 estudiantes de la UNMSM
n2 = 72 estudiantes de la UNE-EGV
n1 = 51 estudiantes del Colegio Humboldt

Por tanto n = n1 + n2 + n3, suma total de estudiantes

La variable respuesta

Yij = puntaje total del estudiante i-ésimo en el j-ésimo centro de estudios, donde i =1 ... nk; j = 1,2,3, obtenidos en la prueba de razonamiento matemático.

A partir de esta información se plantea dos maneras independientes de evaluar la varianza:

1. Una varianza llamada "dentro de los grupos" (ya que sólo contribuye a ella la varianza dentro de los grupos), o varianza de error, o cuadrados medios del error, y habitualmente representada por MSE (Mean Square Error).

   La MSE es un cociente, donde el numerador, es la suma de cuadrados del error y se representa por SSE y el denominador, son los grados de libertad, por ser los términos independientes de la suma de cuadrados.

2. Otra varianza, llamada "entre grupos" (sólo contribuye a ella la varianza entre los distintos grupos), o varianza de los tratamientos, o cuadrados medios de los tratamientos es aquella representada por las siglas MSA.

   La MSA es también un cociente; pero en este caso el numerador, es la suma de cuadrados de los tratamientos y se le representa por SSA, y el denominador son los grados de libertad (k-1).

MSA y MSE, estiman la varianza poblacional en la hipótesis, que postula que los grupos provengan de la misma población de estudiantes. La distribución del cociente de las dos estimaciones independientes de la varianza de una población normal es una **F** con los grados de libertad correspondientes al numerador y denominador respectivamente, por lo tanto se puede contrastar dicha hipótesis usando la distribución **F** de **Fisher**.

Si en base a este contraste se rechaza la hipótesis, este rechazo implica que las medias poblacionales son distintas, de modo que con un único contraste, se decide la igualdad de las medias.

Los resultados de un ANOVA se suelen representar en una tabla como la siguiente:

Fuente de Variación	Grados de Libertad	Suma de Cuadrados	Media de los Cuadrados	F
Entre grupos	**k-1**	**SSA**	**MSA = SSA/ (k-1)**	**MSA / MSE**
Dentro del grupo	**k(n-1)**	**SSE**	**MSE = SSE/ k(n-1)**	
Total	**kn-1**	**SST**	**SST/ (kn-1)**	

El cociente **F** se usa para realizar el contraste de la hipótesis de medias iguales. La región crítica para dicho contraste es **F** > **F**(k-1,(n-1)k)

6.3.3. Evaluación de la Confiabilidad

En las siguientes secciones se definen los conceptos de confiabilidad y validez, y se revisa brevemente las herramientas estadísticas que serán utilizadas.

Un aspecto clave de los instrumentos es saber el grado de confiabilidad de las mediciones. La confiabilidad de un instrumento de medición se refiere al grado en que su aplicación repetida al mismo sujeto u objeto produce iguales resultados.

En general, la confiabilidad se define como el grado de constancia, estabilidad y precisión de un instrumento de medida. El principio de confiabilidad es el error de medición, y por tanto los métodos para determinar la confiabilidad de un test tendrán que utilizar procedimientos que confirmen la precisión de la medición.

Entre los métodos de confiabilidad, tenemos el método de los tests equivalentes y el método de las dos mitades. Pero uno de los métodos más adecuados para medir el grado de confiabilidad de una prueba, especialmente cuando la prueba es bi o multifactorial, como en este caso, es el método de de consistencia interna.

Método de consistencia interna. Se denomina así a la fiabilidad que se obtiene relacionando partes de un test con otras secciones, de ese mismo test. Esta forma de obtener la fiabilidad ha generado, por sí misma, una importante área de estudio en la teoría y práctica de la construcción de tests.

El método de la consistencia interna, se subdivide en varias partes y deben someterse al análisis, tanto las varianzas como las covarianzas de las mencionadas partes del test. Por ejemplo, "la prueba de Razonamiento Matemático" puede dividirse en las partes teóricas que precisa su metodología de aplicación, es decir, se pueden asignar los ítemes a uno u otro atributo de capacidad, según sea el caso.

Si la correlación se establece entre las puntuaciones de todos los individuos en cada uno de los itemes de una parte, con los correspondientes de otra, la fiabilidad será un indicador de la consistencia interna de los elementos del test. El método de consistencia interna nos informa cuál es la relación entre los distintos componentes del test, y nos lleva a determinar un coeficiente de consistencia interna.

En general, desarrollaremos con mayor énfasis la *consistencia interna* entre las diferentes partes de la prueba, que se expresan mediante el denominado coeficiente Alfa (□) de Crombach y los coeficientes de Kuder Richardson 20 y 21.

a) El Coeficiente Alfa de Cronbach

Este coeficiente es un indicador que mide la consistencia interna de las puntuaciones, y viene dada por la siguiente expresión:

$$\alpha = \frac{n}{n-1} \frac{\sigma_x^2 - \sum_{i=1}^{n} \sigma_{x_i}^2}{\sigma_x^2} = \frac{n}{n-1} \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \sigma_{x_i}^2}{\sigma_x^2} \right) \tag{1}$$

Donde:

X : Suma de las puntuaciones en cada uno de los n elementos (o de los ítemes) X_i, que componen el test (i = 1, ..., n).

n : Número total de elementos o ítemes del test, (en el caso de que sean ítemes, *n* coincide con la longitud del test).

X_i : Puntuación en la componente o en el ítem *i*-ésimo.

σ^2_X: Varianza de las puntuaciones en el test.

σ^2_{Xi} :Varianza de la i-ésima componente (o del ítem) del test.

El valor del coeficiente Alfa de Crombach oscila entre cero y uno. El valor cero se interpreta como nada confiable y el valor uno, como absolutamente confiable.

b) Los coeficientes de Kuder-Richardson

Son dos versiones de la fórmula general Alfa de Crombach, para sendos casos particulares.

Kuder y Richardson dedujeron un gran número de fórmulas, en particular nos referimos a los ocupaban el lugar 20 y 21, respectivamente.

Estos indicadores fueron desarrollados para simplificar los cálculos, en casos en los cuales, los componentes del test correspondan a ítemes con respuesta binaria, llamados, dicotómicos.

La respuesta a un ítem dicotómico no admite más que dos alternativas que son exhaustivas y mutuamente excluyentes: "correcto" o "incorrecto", con probabilidades asociadas *p* para la respuesta correcta, y $q = 1 - p$ para la respuesta incorrecta.

Vamos a presentar los coeficientes 20 y 21 de Kuder-Richardson.

- **El coeficiente número 20 de Kuder-Richardson (KR_{20}):**

Considerando la dicotomía de los items, la distribución de probabilidades asociadas a estas variables (ítemes) es Bernoulli (p), y por lo tanto la varianza está dada por:

$$\sigma_{X_i}^2 = p_i(1 - p_i) = p_i \cdot q_i \tag{2}$$

sustituyendo (2) en (1) se tiene

$$KR_{20} = \frac{n}{n-1} \frac{\sigma_x^2 - \sum_{i=1}^{n} p_i(1 - p_i)}{\sigma_x^2} = \frac{n}{n-1}\left(1 - \frac{\sum_{I=1}^{n} p_i q_i}{\sigma_x^2}\right) \tag{3}$$

donde:

n : Número de ítemes del test

σ^2_X : Varianza de las puntuaciones en el test.

p_i : Proporción de examinados que responden correctamente al ítem *i*.

La proporción p_i es una medida de la dificultad del ítem referida al grupo que constituye la muestra de examinados o grupo normativo.

- **El coeficiente número 21 de Kuder-Richardson (KR_{21}):**

Es una extensión deL coeficiente 20 de Kuder-Richardson y se calcula así

$$KR_{21} = \frac{n}{n-1}\left(1 - \frac{n\,\overline{pq}}{\sigma_x^2}\right) \tag{4}$$

donde:

n : Número de itemes del test.

σ^2_X : Varianza del test.

$\overline{p}$: Promedio de las proporciones de examinados en cada item con respuestas correctas. $\overline{q} = 1 - \overline{p}$

Al ser los ítemes dicotómicos y con mucha variabilidad en los p_i se puede optar por el KR_{20}, no obstante en general, entre estos coeficientes se da la siguiente relación:

$$KR_{20} \geq KR_{21} \tag{5}$$

La igualdad se producirá solamente en el caso en que todos los ítemes tengan la misma dificultad; pues en ese caso $p_i = p = \overline{p}$ y en consecuencia, $q_i = q = \overline{q}$.

Que $KR_{20} \geq KR_{21}$ se debe a lo ya expuesto, que mayor variabilid+

d incide en un mayor coeficiente de fiabilidad.

Se da la igualdad cuando $p_i \equiv \overline{p}$, siendo la varianza:

$$np(1-p) = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i \tag{6}$$

Por consiguiente, KR_{20} es preferible a KR_{21} cuando se desea ser más exigente en el cálculo de la fiabilidad.

En conclusión un instrumento es confiable si mide correctamente sin error pero además de confiable, requiere ser válido.

6.3.4. Evaluación de la Validez

Un instrumento es válido, si además de confiable cumple con el propósito para el cual fue construido. Por tanto la ***validez*** es la cualidad de un instrumento que mide aquel atributo de rendimiento o capacidad que se pretende medir y se refiere a los resultados de una prueba por su contenido y no al proceso de evaluación de la prueba misma.

Tenemos varios tipos de validez, a saber:

1) La validez de criterio y contenido
2) La validez concurrente
3) La validez de constructo

6.3.4.1. Validez de criterio o de contenido y validez concurrente

La **validez de criterio** es una medida para evaluar el grado de precisión del instrumento o prueba, y estima el desempeño actual, así como el desempeño futuro. En forma similar la **validez de contenido,** es el grado en que un instrumento o prueba representa el universo de variables, del cual se extrae un concepto o criterio, a partir de la consulta a expertos. Algunos autores tratan en conjunto ambos aspectos, denominando a este tipo de validez de criterio o contenido.

En particular, en nuestro caso, se han extraído un conjunto de problemas apropiados que prueban el grado de rendimiento ante una clase impartida. Estos problemas se han elaborado a partir de una tabla de especificaciones que hemos puesto a la consideración de expertos, quienes nos expresaron si los problemas cumplían o no, con las definiciones planteadas en la tabla.

De ellos, observamos que el 80% estuvieron de acuerdo en la selección y representatividad de los problemas. Un 20% nos plantearon algunas observaciones en base a las cuales reformulamos algunos problemas y sustituimos otros.

La validez concurrente se refiere a la elaboración de un instrumento que se supone que se relacione con el aplicado. Por ejemplo, un instrumento para medir la tolerancia se puede relacionar con un test para medir la resiliencia. En nuestro caso, usando el mismo instrumento, hemos relacionado la capacidad de razonamiento aritmético, en sus diversos aspectos, en los ítemes del 6 al 60 con la capacidad de razonamiento lógico en los ítemes del 1 al 5. Como veremos en los resultados se nota una particular concurrencia de los dos factores.

Por último el aspecto más importante que hemos estudiado es la validez de constructo, destinada a probar la coherencia interna general de la prueba.

6.3.4.2. Validez de constructo

Definimos la **validez de constructo** como el grado en que los resultados de una prueba se relacionan con los constructos subyacentes.

Para analizar la validez de constructo del instrumento se requiere tiempo, pues se trata de hacer múltiples comparaciones de correspondencia con la técnica multivariante aplicando el análisis factorial. Este análisis se realiza para medir el grado con el que cada ítem del test se correlaciona con el atributo medido en cada uno de los aspectos en que se subdivide.

Análisis Factorial de Correspondencia Múltiple

Sus orígenes se sitúan en 1963 y se deben a J. P. Benzecri, de la Universidad de Paris, El análisis factorial de correspondencia múltiple es una técnica de interdependencia entre variables cualitativas.

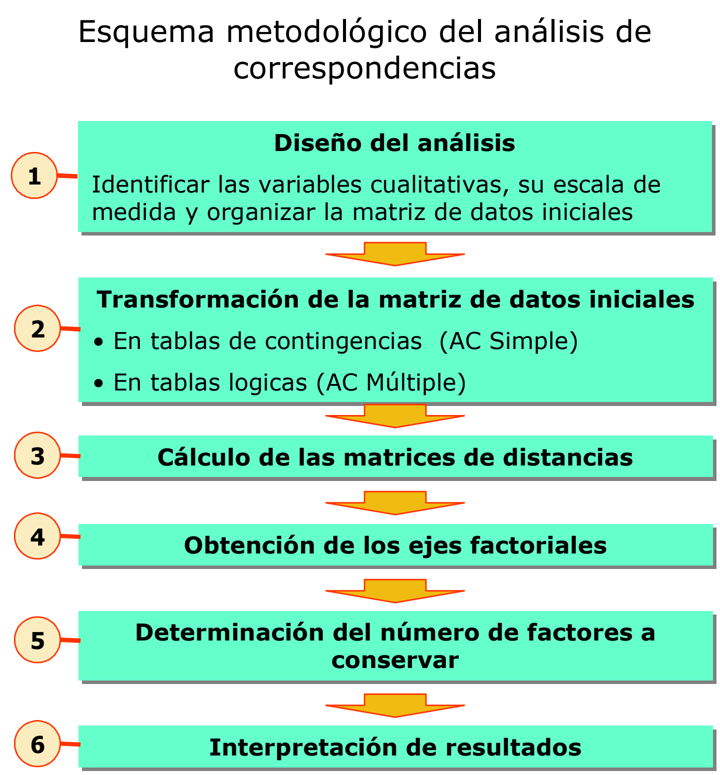
Este tipo de análisis es un caso particular del análisis factorial de componentes principales (Pedret et al, 2000) pero se diferencia básicamente de éste al analizar las formas que adoptan las relaciones entre las variables, lo cual permite analizar cualquier matriz de números no negativos independiente de su escala de medida y permite la representación simultanea de las variables en un mismo espacio.

Este análisis es un método factorial de reducción de la dimensión de la tabla de casos-variables con datos cualitativos, (Carrasco et al, 1993) cuyo concepto multivariante es distinto, pues se considera como variables para el cálculo las diversas categorías que configuran las verdaderas variables originales. Es de aplicación incluso con dos variables, como sucede en el caso de Análisis de Correspondencias Simple. Sin embargo el método se generaliza cuando el número de categorías es mayor de dos, dando lugar al Análisis de Correspondencias Múltiples (ACM).

El propósito del Análisis de Correspondencias Múltiples es explorar relaciones entre categorías, evaluando similaridades o disimilaridades entre ellas, lo que permitirá su agrupamiento si se detecta que se "corresponden". Todo esto queda plasmado en un espacio dimensional de escasas variables sintéticas o factores que pueden ser interpretadas o "nombradas" y que además deben condensar el máximo de información.

En resumen el Análisis de correspondencias es un análisis de componentes principales, aplicado a variables cualitativas que al no poder utilizar correlaciones, se basa en las distancias no euclídeanas Ji cuadradas.

La metodología del análisis de correspondencias se puede esquematizar en seis etapas, tal como se muestra en la siguiente figura Nº 1 (Pedret et al 2000)



Etapa 1: **Diseño del análisis de correspondencias**.

La principal característica de esta técnica de interdependencia es su capacidad para trabajar con variables cualitativas (nominales u ordinales), permitiendo de este modo analizar cualquier matriz de números no negativos, es decir, matriz de valores absolutos, como se detalla más adelante.

Etapa 2: **Transformación de la matriz de datos iniciales.**

En este caso, el ACM requiere de la composición de una matriz lógica. A continuación se describe el procedimiento mediante un ejemplo.

Sean tres itemes A, B y C, tales que:

A tiene k_1 categorías, por ejemplo $k_1=3$
B tiene k_2 categorías, $k_2=3$
C tiene k_3 categorías, $k_3= 2$

Es decir tenemos $\boldsymbol{p}$ = 3 variables categóricas, donde la *j*-ésima variable tiene K_j categorías, de modo que el número total de categorías de las $\boldsymbol{s}$ variables es:

$$\boldsymbol{s} = k_1 + k_2 + k_3 + ...+ k_p = 8 \tag{7}$$

El punto de partida del análisis es una matriz de datos, T_{nxp} que tiene $\boldsymbol{n}$ filas y $\boldsymbol{p}$ columnas. En las filas estarán situados los individuos y en las columnas las variables.

Supongamos n individuos, observados en las tres variables, donde a cada individuo le corresponde un código asociado a una de las categorías en las variables correspondientes. No tiene propiedades numéricas,

Tabla N° 2.1: Tabla de Códigos condensados: Matriz T_{nxp}

Individuos	A	B	C
1	1	2	1
2	2	3	2
3	1	1	1
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
n	.	.	.

A partir de una tabla de códigos condensados podemos generar una tabla numérica capaz de resumir la misma información. Consideremos la primera columna de esta tabla, donde podemos asociar a cada individuo de la muestra una y sólo una modalidad de cada característica observada. Por ejemplo, la primera columna comparte tres modalidades mutuamente exclusivas, contiene

tres "*variables indicadoras*"; el valor 1 al i-ésimo individuo que presentó esa modalidad, y el valor 0 al i-ésimo individuo que no presentó esa modalidad.
Si repetimos esa operación para cada columna de la tabla T_{nxp} obtendremos bloques de variables indicadoras (Crivisqui, 1993). Se construye así la Tabla Lógica Z, de **n** filas y **s** columnas, mediante una codificación lógica, de las ***s*** categorías que presentan cada uno de los individuos (Crivisqui, 1993)

Tabla N° 2.2: Tabla lógica Matriz Z_{nxs}

Individuos	A			B			C	
	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7	z_8
1	1	0	0	0	1	0	1	0
2	0	1	0	0	0	1	0	1
3	1	0	0	1	0	0	1	0
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
N	1	0	0	0	1	0	0	1
Total	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8

El análisis de correspondencias permite describir grandes tablas lógicas (compuesta de ceros y unos), como las que resultan de la codificación de una prueba. Las filas de estas tablas son en general, individuos u observaciones y las columnas son las categorías de las variables nominales. Es decir que el ACM es una aplicación del Análisis de Correspondencias en una tabla lógica, en lugar de una tabla de contingencia, como ocurre en el análisis de correspondencias simple.

La Tabla Lógica Z_{nxs} es de la siguiente forma:

$$Z = [Z_1, Z_2, \dots, Z_s] \qquad \dots (8)$$

$Z_{ij} = 1$ si el individuo i-ésimo presentó la categoría j.
$Z_{ij} = 0$ si el individuo i-ésimo no presentó la categoría j.

Donde $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, s$

En la práctica del análisis de los datos de una prueba las tablas lógicas pueden ser tablas de enormes dimensiones, que se pueden resumir mediante la matriz de Burt y que describimos a continuación:

Matriz de Burt.

Es una matriz de dimensiones ***s x s***, con s>p. En los bloques diagonales aparecen matrices diagonales conteniendo las frecuencias marginales de cada una de las variables analizadas. Fuera de la diagonal aparecen las tablas de frecuencias cruzadas correspondientes a todas las combinaciones 2 a 2 de las variables analizadas.

$$B = Z'Z \tag{9}$$

Donde:

b_{ij} : es el número de individuos que presentaron las modalidades i-ésima y j-ésima.

b_{jj} : es el número de individuos que presentaron la j-esima modalidad de una característica dada.

La matriz de Burt corresponde a una tabla simétrica, construida por la yuxtaposición de todas las tablas de contingencia definidas por las ***p*** variables observadas (dos a dos).

El ACM implica la descomposición de la matriz de BURT en sus autovalores y autovectores. La obtención, selección e interpretación de los factores son similares al caso del análisis de correspondencias simple.

Etapa 3: **Cálculo de las matrices de distancias**.

Este procedimiento se realiza generalmente en el Análisis de Correspondencias Simple, a partir de las dos tablas de frecuencias absolutas condicionadas. Las distancias se calculan entre los perfiles filas y entre los perfiles columna (Crivisqui 1993).

En este trabajo se utilizará un método de escalamiento óptimo conocido también con el nombre de Correspondencias Múltiple que utiliza el método de análisis de homogeneidad de mínimos cuadrados alternados (HOMALS[1]).

Este método de análisis tiene la finalidad de conseguir cuantificaciones que sean óptimas en el sentido que los centroides (medias) de cada categoría estén tan separados unos de otros como sea posible. Esto implica conseguir la máxima *homogeneidad* entre los sujetos dentro de cada categoría, y en cambio que éstas sean lo más *heterogéneas* posible, lo que se traduciría en una mayor separación en la representación gráfica (Visauta, Martori, 2003)

[1] HOMALS es un acrónimo para referirse al mismo: "***HOM****ogeneity* ***A****nálisis by means of* ***A****lternating* ***L****east* ***S****quares"* y también se conoce con el nombre de correspondencias múltiples

El procedimiento HOMALS, que se encuentra en el paquete estadístico SPSS versión 13.0, utiliza en la estimación de los parámetros el procedimiento conocido como alternancia de mínimos cuadrados.

La estimación de mínimos cuadrados de los valores de los parámetros se realiza en dos fases una de estimación del modelo propiamente dicho y otra de escalamiento óptimo. Estas dos fases se van alternando iterativamente hasta conseguir una convergencia determinada (Visauta, Martori, 2003). El proceso continua luego de que el primer componente ha absorbido y acumulado la mayor variabilidad de la información y así sucesivamente.

Etapa 4: Obtención de los ejes factoriales.

En este paso se desarrolla el proceso de extracción que no es más que un caso particular del proceso utilizado por el Análisis de Componentes Principales (ACP) (Pedret et al 2000).

Cada eje factorial restituye una cantidad determinada de información contenida en la matriz de datos inicial. La medida de la cantidad de información restituida por cada factor es la varianza. Así, el factor que restituya una mayor cantidad de información se obtendrá en primer lugar y el segundo que aporte una mayor cantidad de información estará en segundo lugar. Los factores extraídos son una combinación lineal de las variables iniciales y no están correlacionados. Además no puede existir mas de $\boldsymbol{k}$ factores (con $\boldsymbol{k} < \boldsymbol{s}$)

Etapa 5: Determinación del número de factores a conservar.

El número máximo de dimensiones en la solución será igual al número de categorías de las variables menos el número de variables. A partir de ello suelen utilizarse una, dos o tres dimensiones como máximo dada la dificultad de interpretar un número superior.

Existe una gran cantidad de reglas y criterios para determinar cuál es el número de ejes factoriales que debemos conservar para el análisis final de la información obtenida, los habituales coinciden con los utilizados en la selección de factores a retener en el ACP.

Etapa 6 : Interpretación de resultados.

Pueden ser de utilidad la interpretación de las dimensiones o los ejes factoriales. En nuestro caso es necesario nombrarlos.

Para la interpretación de los resultados se sigue la misma metodología del ACP, pero centrándonos en observar cuanto contribuye cada categoría de las variables en la formación del eje, es decir observando lo que se denomina "contribución absoluta". El método de análisis introduce una medida denominada "inercia" que también mide la variación explicada y esta directamente relacionada con los autovalores.

Sobre la "*simetría*" entre los ejes factoriales extraídos de las nubes de puntos (categorías o criterios) y la nube de individuos, podemos afirmar que permite utilizar la interpretación de "*proximidades*" que se observan entre categorías o grupos de individuos, lo que puede interpretarse como una fuerte relación, siendo así:

- Dos individuos están próximos si han elegido globalmente las mismas categorías o criterios.

- Dos categorías o criterios están próximos si han sido elegidas globalmente por el mismo conjunto de individuos.
- La interpretación de las dimensiones se hace considerando las contribuciones de cada categoría o criterio.

En las secciones anteriores hemos revisado brevemente los conceptos y la metodología para evaluar la confiabilidad y validez de un instrumento de medición.

La relación que existe entre confiabilidad y validez de los constructos es directa y fácil de entender pero sobre ella existen algunas discusiones. Todos aceptan que un instrumento puede ser valido y confiable y que pueda ser confiable, pero no válido. Sin embargo, mientras que para unos autores un instrumento puede ser válido aun sin ser confiable, es decir que la falta de validez, no afectaría su confiabilidad, para otros un instrumento no sea válido si no cumple con el requisito de ser confiable además de cumplir con el propósito para el que fue creado.

6.4. Descripción del Instrumento:

Para medir el rendimiento de resolución de problemas de matemática del curso de "Didáctica de la Matemática III" en los estudiantes universitarios de la especialidad de Educación Primaria y los estudiantes regulares de primaria del Colegio Alexabder von Humboldt, se ha elaborado cuidadosamente una prueba original de sesenta (60 itemes) problemas que representan los diversos conceptos que deben tratarse en 5° y 6° grado de primaria, basados en la resolución de problemas de razonamiento matemático con el material pedagógico utilizado para estos fines. El instrumento fue denominado "Prueba de Razonamiento Matemático" y consta de nueve partes (ver anexo 1).

Cabe destacar que el desarrollo de la prueba se preparó para dos horas y 30 minutos, lo que permite un promedio de 2 minutos y medio por problema, descartando aquellos problemas con argumentos extensos o con cálculos operativos complicados, debido a que no se trata de probar la destreza superior a la normal, sino la destreza necesaria para ser capaz de desarrollar problemas estándar, a partir del conocimiento de las estrategias del currículo de 5° y 6° de primaria presentadas en el curso.

La primera prueba se realizó para todos los estudiantes participantes. Se realizó la misma prueba en un segundo momento (Post Test) sólo en el caso de los estudiantes de la UNMSM. En los otros grupos de estudiantes la prueba fue única.

La prueba contiene 60 (sesenta problemas) distribuidos según 9 aspectos que explican el rendimiento de las capacidades que se requieren para solucionar problemas correspondientes al 5º y 6º grado. Se considera con un puntaje dicotómico la opción de respuesta correcta (un punto) o la opción con respuesta incorrecta (ningún punto).

Adicionalmente se precisa el aspecto metodológico resolutivo desarrollado en cada uno de lo problemas. Para ello hemos evaluado las estrategias y métodos aprendidos, igualmente con puntaje dicotómico: la opción de respuesta correcta (un punto) o la opción con respuesta incorrecta (ningún punto).

6.5. Procesamiento de la Información

Se diseñó una base de datos en la hoja de cálculo Excel, en la cual se consignó la información que se recolectó en las pruebas, y posteriormente se efectuó un control de calidad de llenado y la digitación. Posteriormente se hizo el procesamiento de datos con el paquete SPSS versión 13.

Capitulo VII
Resultados del trabajo de campo

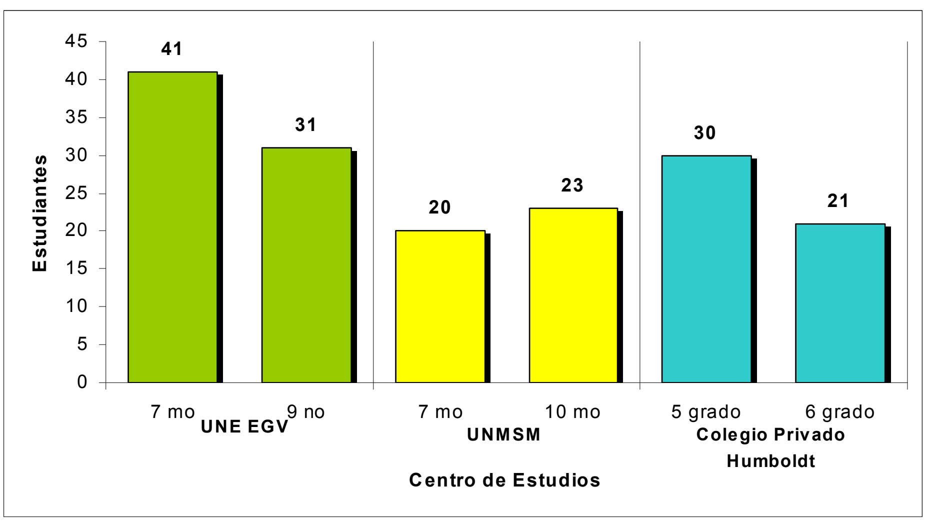
7.1 Presentación, análisis e interpretación de los datos

7.1.1. Resultados descriptivos generales

Se evaluaron un total de 166 estudiantes, siendo 115 estudiantes universitarios de la Especialidad de Educación Primaria y 51 estudiantes regulares de Colegio de 5to y 6to grado para certificar que las capacidades investigadas corresponden a los grados mencionados.

Así mismo, 72 fueron de la Universidad Nacional de Educación "Enrique Guzmán y Valle" (UNE EGV) que pertenecían al 7º y 9º ciclos de la especialidad de Primaria (41 y 31 estudiantes respectivamente), 43 estudiantes de la Universidad Nacional de Mayor de San Marcos (UNMSM), pertenecientes al 7º y 10º ciclo de la especialidad de Educación Primaria (20 y 23 estudiantes respectivamente) y 51 estudiantes menores de edad del "Colegio Peruano Alemán Alexander von Humboldt" (CPA AVH) que cursaban el 5to y 6to de primaria (30 y 21 estudiantes respectivamente). Ver figura N° 01.

Figura N° 01
Distribución de los estudiantes evaluados en la Prueba de Razonamiento Matemático



Sobre la evaluación de las respuestas correctas en la "Prueba de Razonamiento Matemático", se debe tomar en consideración que el grupo de estudiantes de la UNMSM, en ambos ciclos, desarrolló dos evaluaciones "Pre y post - test", antes y después de participar en el curso "Didáctica de la Matemática III" y utilizando la misma prueba. En el caso de los estudiantes del Colegio Humboldt sólo se pudo acceder a una única prueba "Post - test", efectuada después de tomar el curso escolar anual con la metodología propuesta. Por último, en el caso de los estudiantes de la UNE EGV sólo se aplicó la prueba Pre - test, puesto que ellos, como grupo de control, no participaron en el curso, cuya metodología problémica es materia de nuestra investigación evaluativa.

Tabla N° 01: Evaluación del puntaje de respuestas correctas en la Prueba de Razonamiento Matemático

Centro de Estudios	Ciclo / Grado	Casos Válidos N	Puntaje Medio	Desv. típ.	Mediana	Mínimo	Máximo	Coeficiente Variación
	7º	41	26.49	13.59	27	3	52	51.3%
UNE EGV	9 º	31	26.39	14.74	27	1	52	55.9%
Pre test	**Total global 60**	**72**	**26.44**	**13.99**	**27**	1	52	52.9%
	7 º	20	42.65	12.09	43.5	13	58	28.4%
UNMSM *	10º	23	38.91	10.81	41	20	54	27.8%
Pre test	**Total global 60**	**43**	**42.65**	**12.09**	**43.5**	13	58	28.4%
	7 º	20	47.75	9.14	50.5	23	59	19.1%
UNMSM	10º	23	44.00	9.31	47	25	56	21.2%
Post test	**Total global 60**	**43**	**47.75**	**9.14**	**50.5**	23	59	19.1%
Colegio	5º grado	30	42.90	7.81	43	24	57	18.2%
Humboldt	6º grado	21	38.38	10.69	41	13	54	27.9%
Post test	**Total global 60**	**51**	**41.04**	**9.28**	**41**	13	57	22.6%

Fuente: Prueba de Razonamiento Matemático Pre y Post Test /
* El Pre Test solo se efectuó en los estudiantes de la UNE EGV y la UNMSM.

Con relación a los estudiantes universitarios de la Especialidad de Educación Primaria de la UNE Enrique Guzmán y Valle, se observó que el rendimiento medio de resolución de los 60 problemas fue de 26.44 puntos y tienen la mayor dispersión relativa, de los cuales, tanto los de 7º como los de 9º ciclo obtuvieron similar puntaje promedio.

En el grupo de estudiantes universitarios de la UNMSM, se observó que son ellos los que ostentan el más alto grado de rendimiento promedio, siendo de 47.75 puntos (Prueba Post Test) y una dispersión relativa a la media que es la más baja. Incluso el grado de variación es también el más bajo (19.1%).

Cabe destacar que sobre el puntaje mediano, se observa un predominio definido de un mayor rendimiento de resolución de problemas (rendimiento doble) por parte de los estudiantes de la UNMSM (Ver figura No 02) y según el ciclo de estudios, son los de 7º ciclo de la UNMSM, los que alcanzaron mejor desempeño.

Cabe destacar que en el grupo de estudiantes del Colegio Humboldt, más de la mitad de los alumnos de 5° grado de primaria destacan con puntajes superiores y homogéneos, lo que no sucede en el caso de los alumnos de 6º grado.

Figura N° 02
Rendimiento Mediano en la Prueba de Razonamiento Matemático Según Centro de Estudios

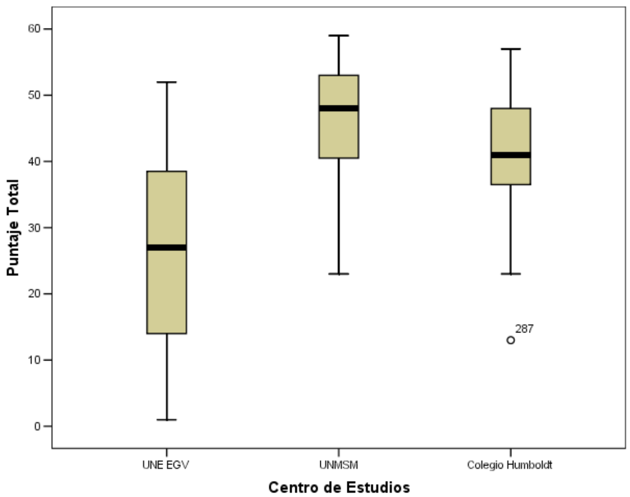
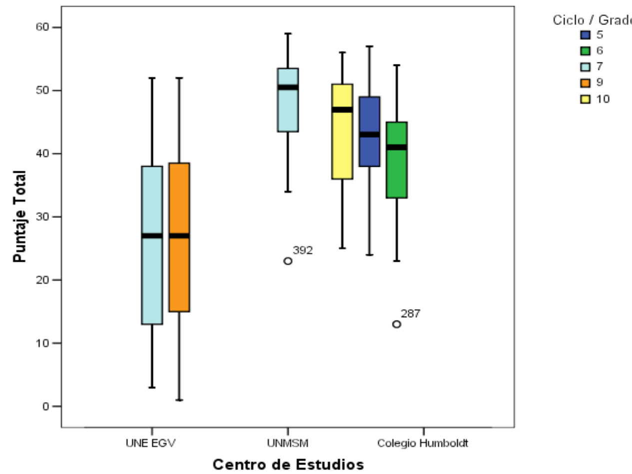


Figura N° 03
Rendimiento Mediano en la Prueba de Razonamiento Matemático Según Centro de Ey Ciclo



Sobre la nota promedio aprobatoria en base de veinte, se puede apreciar que el grupo de estudiantes de la UNMSM ha obtenido una nota promedio de 15.9 puntos (47.75 entre 3), considerablemente aprobatoria, mientras que los estudiantes de la UNE EGV produjeron una nota promedio que refleja el bajo o escaso rendimiento (8.8 puntos). Los estudiantes de primaria del Colegio Humboldt obtuvieron una nota promedio aprobatoria moderada de 13.7 (41.04 entre 3).

Tabla N° 02: Evaluación del puntaje en el método y estrategias empleados en la Prueba de Razonamiento Matemático.

Centro de Estudios	Ciclo / Grado	Casos Válidos N	Puntaje Medio	Desv. típ.	Mediana	Mínimo	Máximo	Coeficiente Variación
	7 º	41	10.56	10.53	7	0	37	99.7%
UNE EGV	9 º	31	12.26	10.18	11	0	36	83.0%
Pre test	**Total global 60**	**72**	**11.29**	**10.34**	**10**	**0**	**37**	**91.6%**
	7 º	20	23.00	9.53	23	0	43	41.4%
UNMSM *	10º	23	19.52	7.32	20	5	31	37.5%
Pre test	**Total global 60**	**43**	**21.14**	**8.50**	**21**	**0**	**43**	**40.2%**
	7 º	20	25.50	9.25	24.5	11	48	36.3%
UNMSM	10º	23	24.61	7.35	25	9	39	29.9%
Post test	**Total global 60**	**43**	**25.02**	**8.20**	**25**	**9**	**48**	**32.8%**
Colegio	5º grado	30	8.57	5.70	8.5	1	24	66.5%
Humboldt	6º grado	21	7.14	6.80	5	0	21	95.2%
Post test	**Total global 60**	**51**	**7.98**	**6.15**	**6**	**0**	**24**	**77.1%**

Fuente: Prueba de Razonamiento Matemático Pre y Post Test /
* El Pre Test solo se efectuó en los estudiantes de la UNE EGV y la UNMSM.

Sobre la evaluación en el método desarrollado y las estrategias empleadas en la resolución de los problemas, se observó que existe un rendimiento promedio bajo que difiere del observado sobre la evaluación de las respuestas, donde destacan los estudiantes de la UNMSM (25.33) que superan en el doble del puntaje promedio respecto a los de la UNE EGV (11.29), además se observa menor grado de variación respecto del promedio en el grupo de estudiantes de la UNMSM.

Sobre los alumnos del Humboldt, se precisa que la evaluación del método empleado en la resolución de problemas es la más baja (Puntaje medio 7.98) pero con puntaje de respuestas correctas altas. Probablemente los escolares prefieren calcular los resultados mentalmente y no invierten tiempo en detallar por escrito sus estrategias.

Respecto a la nota promedio aprobatoria, se puede apreciar que en todos los grupos de estudiantes se han producido notas promedio desaprobatorias, siendo de menor puntaje los estudiantes del Humboldt y la UNE que produjeron en sendos casos, un puntaje promedio que refleja el escaso registro de los métodos y estrategias empleados.

7.1.2. Rendimiento medio Pre y Post Test en UNMSM

Se evaluaron las pruebas Pre y Post Test en un total de 43 estudiantes, 20 de ellos eran del sétimo ciclo y 23 del décimo ciclo de la Especialidad de Primaria de la Facultad de Educación de la UNMSM.

Además, se trabaja bajo el supuesto que la observación del "puntaje total sobre las respuestas correctas en la prueba" es cuantitativa continua y que su distribución es aproximadamente normal. En esta situación, probaremos la existencia de diferencia en cuanto al efecto del curso de Didáctica de la Matemática sobre el rendimiento promedio.

En el grupo de sétimo ciclo el rendimiento medio que evalúa las respuestas correctas en la resolución de problemas en la prueba de razonamiento matemático de los 60 problemas en el Pre y Post Test fue de 42.65 y 47.75 puntos respectivamente, siendo menor la dispersión relativa en la prueba Post Test, es decir que los puntajes fueron más homogéneos respecto de la media. Esta diferencia es estadísticamente significativa ($p = 0.0015$). Ver tabla No 03.

Sobre los estudiantes del décimo ciclo, se observó que el rendimiento medio en ambas pruebas fue relativamente menor al grupo anterior de estudiantes, siendo de 38.91 y 44.00 puntos en promedio respectivamente. Esta diferencia es estadísticamente significativa ($p = 0.000$). Ver tabla No 03.

Sobre la representación de nota la promedio aprobatoria, se puede apreciar que en un inicio se ha producido una nota promedio de 14.2 puntos (42.65 entre 3), considerablemente aprobatoria, mientras que en el post Test la nota promedio refleja un ligero incremento a casi dieciséis puntos (15.9 puntos). Ver Tabla No 04.

Tabla N° 03: Comparación del puntaje medio de las respuestas correctas en el Pre y Post Test en estudiantes de 7º y 10º Ciclo de la UNMSM

Ciclo de estudios en la UNMSM	Tipo de Test	Estudiantes	Puntaje Medio	Desviación típica.	Significación *
Sétimo Ciclo	Pre Test	20	42.65	12.093	0.015
	Post Test	20	47.75	9.141	
Décimo Ciclo	Pre Test	23	38.91	10.808	0.000
	Post Test	23	44.00	9.313	

Fuente: Prueba de Razonamiento Matemático Pre y Post Test / Estudiantes UNMSM
* La prueba T Student para datos apareados se compara con $\alpha=0.05$

Sobre el rendimiento medio en la prueba que evalúa el método desarrollado y las estrategias empleadas en la resolución de los sesenta problemas, evaluados en los estudiantes de sétimo ciclo de la UNMSM se aprecia que la diferencia del pre Test (23.00) y el Post Test (25.50) es de dos puntos sobre el puntaje promedio, además se observa que la dispersión relativa en ambas pruebas es casi similar. Esta diferencia no es estadísticamente significativa ($p = 0.120$). Ver tabla No 04.

En este sentido, sobre los estudiantes del décimo ciclo, se observó que el rendimiento medio en ambas pruebas fue relativamente menor al grupo anterior de estudiantes, siendo de 19.5 y 24.6 puntos en promedio respectivamente. Esta diferencia es estadísticamente significativa ($p = 0.000$). Ver tabla No 04.

Respecto al puntaje promedio de este tipo de evaluación, se puede apreciar que en ambos momentos se han producido notas promedio desaprobatorias, siendo de un discreto margen de diferencia el grupo de estudiantes de 7º ciclo, cuya nota promedio refleja un bajo rendimiento sobre el método empleado en el desarrollo de la resolución de problemas.

Tabla N° 04: Comparación del puntaje medio del método y estrategias empleado en el Pre y Post Test en estudiantes de 7º y 10º ciclo de la UNMSM

Ciclo de estudios en la UNMSM	Tipo de Test	Estudiantes	Puntaje Medio	Desviación típica.	Significación *
Sétimo Ciclo	Pre Test	20	23.00	9.526	N.S.**
	Post Test	20	25.50	9.248	
Décimo Ciclo	Pre Test	23	19.52	7.317	0.000
	Post Test	23	24.61	7.347	

Fuente: Prueba de Razonamiento Matemático Pre y Post Test / Estudiantes UNMSM
* La prueba T Student para datos apareados se compara con $\alpha=0.05$.
** Prueba de datos apareada No Significativa.

7.1.3. Rendimiento medio Pre y Post Test en UNMSM según las capacidades de resolución de problemas

Sobre el rendimiento medio de las respuestas evaluada en las capacidades especificas se tiene que:

Se puede apreciar que la mayoría de las capacidades de resolución de problemas los puntajes medios apareados bajo las pruebas Pre y Post Test se observan que son similares tanto en el grupo de estudiantes de 7º y 10º ciclo, es decir que el rendimiento medio al interior de la prueba ha tenido el mismo rendimiento medio sobre la resolución de problemas de matemáticas. Ver tabla No 05.

Tabla No 05: Comparación del rendimiento medio del Pre y Post sobre el Puntaje de respuesta correctas en las Capacidades de resolución de problemas en estudiantes de Sétimo y Décimo Ciclo de la UNMSM.

Capacidades de Resolución de Problemas	Tipo de Prueba	Itemes Punt tot	Sétimo Ciclo			Décimo Ciclo		
			Puntaj Medio	DT.	S*	Puntaj Medio	DT.	S*
Capacidad de establecer relaciones lógicas	Pre Test	5	4.05	1.10	N.S.	3.65	1.11	N.S.
	Post Test	5	4.05	1.05		4.00	1.17	
Capacidad de establecer relaciones aritméticas simple	Pre Test	18	14.70	2.89	N.S.	14.35	2.64	N.S.
	Post Test	18	15.45	3.28		15.09	1.62	
Capacidad de resolver problemas con los conceptos del MCD y MCM	Pre Test	3	1.55	0.83	N.S.	1.30	1.06	N.S.
	Post Test	3	2.10	1.02		1.61	0.99	
Capacidad de manejar la terminología técnica de las cuatro operaciones	Pre Test	4	3.10	1.37	0.015	3.83	0.39	N.S.
	Post Test	4	3.80	0.41		3.65	0.57	
Capacidad de establecer el perímetro y el área del cuadrado y del rectángulo	Pre Test	10	5.30	2.96	0.011	5.78	2.15	N.S.
	Post Test	10	6.70	2.08		6.17	2.52	
Capacidad de trabajar el concepto de fracción con el uso de operadores	Pre Test	6	4.50	1.76	N.S.	3.48	2.13	0.005
	Post Test	6	5.15	1.18		4.70	1.84	
Capacidad de manejar problemas con decimales	Pre Test	4	2.45	1.32	N.S.	1.04	1.15	0.001
	Post Test	4	2.15	1.18		2.04	1.43	
Capacidad de establecer proporciones	Pre Test	4	2.95	1.19	N.S.	2.17	1.50	N.S.
	Post Test	4	3.25	1.07		2.57	1.31	
Capacidad de manejar el concepto de porcentaje	Pre Test	6	4.20	2.07	0.020	3.26	2.38	0.009
	Post Test	6	5.25	0.91		4.30	2.03	

Fuente: Prueba de Razonamiento Matemático Pre y Post Test /
DT: Desviación Típica
S* : La prueba T Student para datos apareados se compara con α=0.05.
NS :No Significación

Cabe destacar que en los estudiantes de 7º ciclo, sólo se encontró diferencias estadísticas significativas en la "Capacidad de manejar la terminología técnica de las cuatro operaciones", la "Capacidad de establecer el perímetro y el área del cuadrado y del rectángulo" y la "Capacidad de manejar el concepto de porcentaje" Tabla N° 05.

En el grupo de estudiantes de 10º ciclo, sólo se encontró diferencias estadísticas significativas en la "Capacidad de trabajar el concepto de fracción con el uso de operadores", en la "Capacidad de manejar problemas con decimales" y en la "Capacidad de manejar el concepto de porcentaje" Tabla N° 05.

Tabla No 06: Comparación del rendimiento medio del Pre y Post sobre el Puntaje en el método y estrategias empleada en las Capacidades de resolución de problemas en estudiantes de séptimo y décimo ciclo de la UNMSM.

Capacidades de Resolución de Problemas	Tipo de Prueba	Itemes	Sétimo Ciclo			Décimo Ciclo		
			Puntaj Medio	DT.	S*	Puntaj Medio	DT.	S*
Capacidad de establecer relaciones lógicas	Pre Test	5	2.20	1.47	0.022	2.04	1.36	0.000
	Post Test	5	3.00	1.12		3.39	1.16	
Capacidad de establecer relaciones aritméticas simple	Pre Test	18	8.50	4.27	N.S.	8.65	3.81	N.S.
	Post Test	18	7.95	3.87		9.39	3.06	
Capacidad de resolver problemas con los conceptos del MCD y MCM	Pre Test	3	1.25	1.02	0.019	0.91	1.00	N.S.
	Post Test	3	1.90	0.91		1.00	1.04	
Capacidad de manejar la terminología técnica de las cuatro operaciones	Pre Test	4	0.05	0.22	N.S.	0.26	0.92	0.016
	Post Test	4	0.20	0.52		0.57	1.08	
Capacidad de establecer el perímetro y el área del cuadrado y del rectángulo	Pre Test	10	4.20	2.46	N.S.	4.17	2.08	0.002
	Post Test	10	4.25	2.34		5.43	2.13	
Capacidad de trabajar el concepto de fracción con el uso de operadores	Pre Test	6	0.90	1.33	0.003	0.91	1.56	N.S.
	Post Test	6	2.15	1.73		0.78	1.00	
Capacidad de manejar problemas con decimales	Pre Test	4	0.95	0.76	N.S.	0.61	0.78	N.S.
	Post Test	4	1.10	0.79		0.83	0.65	
Capacidad de establecer proporciones	Pre Test	4	2.90	1.59	N.S.	1.57	1.41	0.008
	Post Test	4	3.05	1.39		2.57	1.31	
Capacidad de manejar el concepto de porcentaje	Pre Test	6	2.65	2.08	N.S.	0.83	1.27	N.S.
	Post Test	6	2.60	1.79		1.22	1.54	

Fuente: Prueba de Razonamiento Matemático Pre y Post Test /
DT: Desviación Típica
S* : La prueba T Student para datos apareados se compara con $\alpha=0.05$.
NS :No Significación

En similar forma, al evaluar el método empleado para la resolución de problemas, se observó que el rendimiento medio tiene puntajes medios muy parecidos y dispersiones relativas al rendimiento medio menores, y cuyas diferencias de medias apareadas fueron en la mayoría de las nueve capacidades observadas no significativas. Ver tabla No 06.

Cabe destacar que en los estudiantes de 7º ciclo, sólo se encontró diferencias estadísticas significativas en la "Capacidad de establecer relaciones lógicas", en la "Capacidad de resolver problemas con los conceptos del MCD y MCM " y en la "Capacidad de trabajar el concepto de fracción con el uso de operadores" Tabla N° 06.

En el grupo de estudiantes de 10º ciclo, sólo se encontró diferencias estadísticas ignificativas en la "Capacidad de establecer relaciones lógicas", en la "Capacidad de manejar la terminología técnica de las cuatro operaciones", en la "Capacidad de establecer el perímetro y el área del cuadrado y del rectángulo", y en la "Capacidad de establecer proporciones" Tabla N° 06.

7.1.4. Comparación del Rendimiento medio según el Centro de estudios Análisis de la Varianza

El presente estudio tiene por propósito comparar el rendimiento promedio en la prueba de razonamiento matemático en tres centros de estudios.

Para tal efecto se ha considerado los puntajes totales en las respuestas correctas de una prueba "Post Test" en 72 estudiantes de la UNE EGV, 43 estudiantes de la UNMSM y 51 estudiantes de primaria del Colegio Humboldt.

Trabajamos bajo el supuesto que la variable dependiente puntaje del Post test es normal, presenta homogeneidad en los tres centros de estudios y no influye en el contraste de las diferencias de los grupos.

Respecto a la interpretación de los resultados, como se mostraba en la Figura N° 01. las medias del rendimiento de cada centro de estudios presentaban a priori diferencias. En la Tabla No 07, el contraste observado sugiere que el rendimiento promedio es variado y está relacionado al tipo de Centro de Estudios, y es estadísticamente significativo (Significancia p = 0.000).

Tabla No 07
Resultados del Análisis de Varianza para los tres Centro de Estudios sobre el rendimiento medio de las respuestas correctas en el Prueba de Razonamiento Matemático

ANOVA

Puntaje Total

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	11951.247	2	5975.624	44.554	.000
Intra-grupos	21861.885	163	134.122		
Total	33813.133	165			

Así, por ejemplo, el rendimiento promedio de los estudiantes de la UNE EGV tiene diferencias significativas (p = 0.000) con los de UNMSM y el Colegio Humboldt, siendo este rendimiento menor (signo negativo de las diferencias de medias) a los demás, y los estudiantes de la UNMSM no tienen diferencias con los del Colegio Humbodlt. Ver Tabla No 08.

Tabla No 08
Resultados del Análisis de Varianza para los tres Centro de Estudios sobre el rendimiento medio de las respuestas correctas en el Prueba de Razonamiento Matemático

Comparaciones múltiples

Variable dependiente: Puntaje Total
Bonferroni

(I) Centro de Estudios	(J) Centro de Estudios	Diferencia de medias (I-J)	Error típico	**Sig.**	Intervalo de confianza al 95% Límite inferior	Límite superior
UNE EGV	UNMSM	-19.300*	2.232	**.000**	-24.70	-13.90
	Colegio Humboldt	-14.595*	2.120	**.000**	-19.72	-9.47
UNMSM	UNE EGV	19.300*	2.232	**.000**	13.90	24.70
	Colegio Humboldt	4.705	2.398	**.154**	-1.09	10.50
Colegio Humboldt	UNE EGV	14.595*	2.120	**.000**	9.47	19.72
	UNMSM	-4.705	2.398	**.154**	-10.50	1.09

*. La diferencia entre las medias es significativa al nivel .05.

Al final presentamos los anexos que justifican estos resultados.

Tabla A: Análisis de la varianza
Tabla ANOVA de las 9 capacidades de resolución de problemas según los centros de estudios

Tabla B: Comparación del rendimiento promedio obtenido en las 9 capacidades según los centros de estudios.

Tabla C: Tabla ANOVA de las 9 capacidades de resolución de problemas según los centros de estudios

Tabla D: Comparación del rendimiento promedio obtenido en las nueve capacidades de Resolución de problemas respecto de las estrategias empleadas según los centros de estudios

Anexo ACM: Medidas de discriminación

7.1.2. Análisis de la confiabilidad

La prueba de Razonamiento Matemático consta de nueve partes, cada una de ellas contiene las características más importantes sobre las estrategias didácticas de la matemática centrada en la resolución de problemas que fueron evaluadas al resolver operaciones planteadas en sesenta problemas aritméticos básicos. Estas estrategias se evalúan a través de las capacidades para solucionar problemas de matemáticas que abarcan los diversos significados de las operaciones en los campos conceptuales que se han seleccionado.

Cada ítem se ha operacionalizado y tratado por el método de categorización, así, cada respuesta correcta fue validada con un punto y con cero si fue incorrecta (1= correcta y 0= incorrecta).

En esta parte, mostraremos el desarrollo del coeficiente alfa de Crombach.

La evaluación de la fiabilidad de la "Prueba de razonamiento Matemático" produce un elevado coeficiente alfa de Crombach del 95.2% y al ser tipificados o estandarizados se obtiene un índice de alfa de Crombach del 95.3%.

Respecto a los grupos de estudiantes, se observó que los estudiantes de la UNE EGV producen el más alto índice de confiabilidad, siendo del 95.4%, seguido por un alto índice en los estudiantes de la UNMSM (91.4%) y los estudiantes del colegio CPA AVH (86.8%),

Como las respuestas a los ítemes de cada pregunta son dicotómicas (1 si es correcta y 0 si no lo es) el coeficiente alfa de Crombach nos da el mismo valor que el coeficiente KR-20 de Kuder-Richardson (Visauta, Martori, 2003). Ver tabla No 09.

Tabla No 09: Estadísticos de fiabilidad

	Alfa de Cronbach	Alfa de Cronbach basada en los elementos tipificados	N de itemes	KR – 20	KR – 21
General	**0.952**	**0.953**	**60**	**0.952**	**0.945**
UNE EGV	0.954	0.952	60	0.954	0.940
UNMSM	0.914	0.915	60	0.904	0.887
Colegio Humboldt	0.868	0.888	60	0.897	0.864

Obsérvese que se cumple la relación de **KR-20 ≤ KR-21.** Este grupo de índices de confiabilidad nos informa de la posible relación existente entre las puntuaciones obtenidas para conocer el rendimiento promedio a través de la prueba.

Así mismo, el procedimiento de cálculo de los coeficientes Kuder y Richardson 20 y 21 se pueden apreciar en la parte de anexos, cuyo desarrollo y operaciones es factible a través de la hoja de cálculo.

Respecto de los coeficientes de fiabilidad alfa de Crombach calculados en cada uno de las nueve capacidades de resolución de problemas, es decir al interior del instrumento, se observa en términos generales (Tabla No 10) que las preguntas sobre la "Capacidad de establecer relaciones lógicas" (preguntas 1 al 5) destacan con el índice de fiabilidad más bajo, siendo del 41.8% de confiabilidad en la medición de esta parte del instrumento, lo que indica una baja relación entre estos itemes para establecer seguridad sobre algún nivel de rendimiento a observar. Ver tabla No 10.

Tabla No 10: Coeficiente de Confiabilidad calculado en las Capacidades de resolución de problemas Según Universidad

Capacidades	Alfa de Cronbach General	N itemes	Alfa de Cronbach Según centros de estudios		
			UNE EGV	UNMSM	Colegio Humboldt
Capacidad de establecer relaciones lógicas	0.418	5	0.255	0.581	0.343
Capacidad de establecer relaciones aritméticas simples	0.801	18	0.840	0.899	0.521
Capacidad de resolver problemas con los conceptos del MCD y MCM	0.528	3	0.544	0.267	0.391
Capacidad de manejar la terminología técnica de las cuatro operaciones	0.725	4	0.794	-	0.324
Capacidad de establecer el perímetro y el área del cuadrado y del rectángulo	0.852	10	0.833	0.514	0.741
Capacidad de trabajar el concepto de fracción con el uso de operadores	0.886	6	0.883	0.677	0.731
Capacidad de manejar problemas con decimales	0.692	4	0.715	0.589	0.538
Capacidad de establecer proporciones	0.825	4	0.849	0.721	0.701
Capacidad de manejar el concepto de porcentaje	0.862	6	0.885	0.280	0.794

- El valor es negativo debido a una covarianza promedio entre los elementos negativa, lo cual viola los supuestos del modelo de fiabilidad. Puede que desee comprobar las codificaciones de los elementos.

En términos generales la "Capacidad de establecer el perímetro y el área del cuadrado y del rectángulo" y la "Capacidad de trabajar el concepto de fracción con el uso de operadores" tienen los más altos índices de fiabilidad, 85.2% y 88.6% respectivamente, y respecto de los otros grupos de estudiantes, se observó con mayor índice alfa de Crombach a los estudiantes de la UNE EGV y a los estudiantes del Colegio Humboldt.

7.1.3. Análisis de Correspondencias Múltiple (ACM)

Se pretende realizar un ACM para la muestra de 166 estudiantes tomando las sesenta variables consideradas en la “Prueba de Razonamiento Matemático”. Una característica principal para el análisis de estas variables es que son comparables y están agrupadas teóricamente para describir las siguientes capacidades

1. Capacidad de establecer relaciones lógicas. Estas se refieren tanto a relaciones entre elementos de un conjunto y relaciones entre clases determinadas, como a relaciones utilizando conectivas de la lógica proposicional y a relaciones lógicas utilizando medidas propuestas. (5 items del test del 1 al 5)
2. Capacidad de establecer relaciones aritméticas simples entre dos, tres o cuatro cantidades que impliquen el uso de las cuatro operaciones básicas. (18 items del test del 6 al 23)
3. Capacidad de resolver problemas con los conceptos del MCD y MCM. (3 items del 24 al 26)
4. Capacidad de manejar la terminología técnica de las cuatro operaciones. (4 items del 27 al 30)
5. Capacidad de establecer el perímetro y el área del cuadrado y del rectángulo. (10 items del 31 al 40)
6. Capacidad de trabajar el concepto de fracción con el uso de operadores. (6 items del 41 al 46)
7. Capacidad de manejar problemas con decimales (4 items del 47 al 50)
8. Capacidad de establecer proporciones (4 items del 51 al 54)
9. Capacidad de manejar el concepto de porcentaje. (6 items del 55 al 60).

Estas dimensiones teóricas no están en discusión, pues el objetivo del ACM en el presente estudio está explícitamente orientado a describir en términos generales las relaciones existentes entre las categorías observadas en cada item en forma grafica, en este contexto, la presencia de cada capacidad analizada se sitúa en la verificación objetiva, y los elementos suplementarios (tipo de centro de estudio y ciclo o grado cursado) que confirman la significación de los resultados.

Sobre las categorías en estudio se tiene las respuestas “***correctas***” e “***incorrectas***” conservadas desde el proceso de categorización en todas las sesenta variables que fueron descritas anteriormente. El análisis de correspondencias se realizó independientemente del tratamiento en el análisis de fiabilidad, respetando los criterios de categoría en su codificación inicial.

Bajo lo supuestos básicos por los cuales los datos son estrictamente categóricos (dicotómicos) y las dimensiones o capacidades subyacentes pueden variar de estudiante a estudiante, se procede al procesamiento, y el programa ofrece, la proporción de inercia categórica explicada por cada una de las dimensiones.

La primera dimensión contribuye con el 28.37% de la inercia total, los autovalores y la inercia resultante del ACM en las siguientes dimensiones nos indican que la selección de los cuatro primeras dimensiones producen una proporción de variación explicada del 40.5% (28.37+4.77+3.84+3.5 = 40.5%) y esta inercia es suficiente, si se tiene en cuenta que las relaciones existentes parten desde ***variables categóricas,*** incorporando la máxima de información posible. Tabla No 11.

Tabla No 11

Resumen del modelo

Dimensión	Alfa de Cronbach	Varianza explicada Total (Autovalores)	Inercia	% de la varianza
1	,957	17,024	,284	28,373
2	,662	2,863	,048	4,772
3	,575	2,301	,038	3,835
4	,532	2,098	,035	3,496
5	,433	1,741	,029	2,902
6	,380	1,596	,027	2,660
7	,328	1,477	,025	2,461
8	,295	1,408	,023	2,347
9	,268	1,358	,023	2,264
Total		31,866	,531	
Media	,730[a]	3,541	,059	5,901

a. El Alfa de Cronbach Promedio está basado en los autovalores promedio.

Las posteriores dimensiones contribuyen muy poco a la inercia total, lo cual hace pensar que se trata de dimensiones especificas (configuradas por muy pocos variables categóricas) o difícilmente interpretables, por ende, optamos por seleccionar las cuatro primeras dimensiones (Tabla No 11).

Referente al coeficiente alfa de Crombach se puede apreciar que la primera dimensión contiene el más alto índice de confiabilidad (0.9572), así mismo, se puede apreciar que este coeficiente de confiabilidad disminuye progresivamente conforme se incrementa el número de dimensiones, así también, el índice de confiabilidad es una apoyo en la decisión de las cuatro dimensiones seleccionadas, pues constituye mas del 50% (alfa de Cronbach = 0.5321) de correlación existente entre estas cuatro primeras dimensiones . (Visauta 2003)

Una vez decidido el número de dimensiones se determinó la discriminación o calidad de la representación de cada item en los ejes factoriales o dimensiones

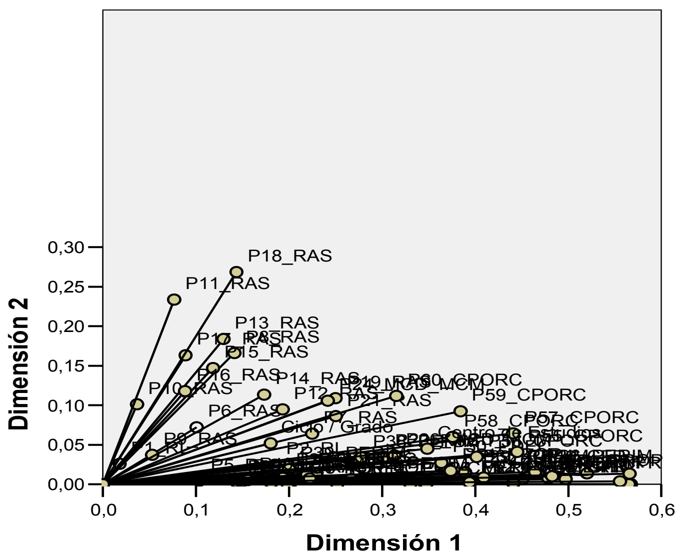
En el caso de la primera dimensión se confirma que es la más importante pues es suficientemente amplia en el número de ítemes contenidas, en efecto, 50 de las 60 ítemes presentan los pesos más altos, es decir, que describe en mejor medida la correlación de estas preguntas y la dimensión, al obtener los más altos valores de discriminación.

La interpretación de esta primera dimensión no es materia de análisis, por el amplio espectro de preguntas que la contienen.

Cabe destacar que la composición de esta dimensión se aprecia desde el grupo de preguntas sobre las capacidades de resolver problemas con los conceptos del MCD y MCM. (3 items del 24 al 26) hasta las preguntas que miden la capacidad de manejar el concepto de porcentaje. (6 items del 55 al 60). Ver anexo Tabla No 01

Figura No 04

Medidas de discriminación



Adicionalmente se aprecia que en la figura no 04, el diagrama de discriminación, separa aquellas preguntas (50 preguntas) que están muy próximas a la primera dimensión (eje vertical) y que son aquellas que guardan una alta correlación, respecto de las preguntas que se aproximan a la segunda dimensión (eje horizontal), en este ultimo grupo de preguntas, se observan las preguntas que describen la capacidad de establecer relaciones aritméticas simples (RAS).

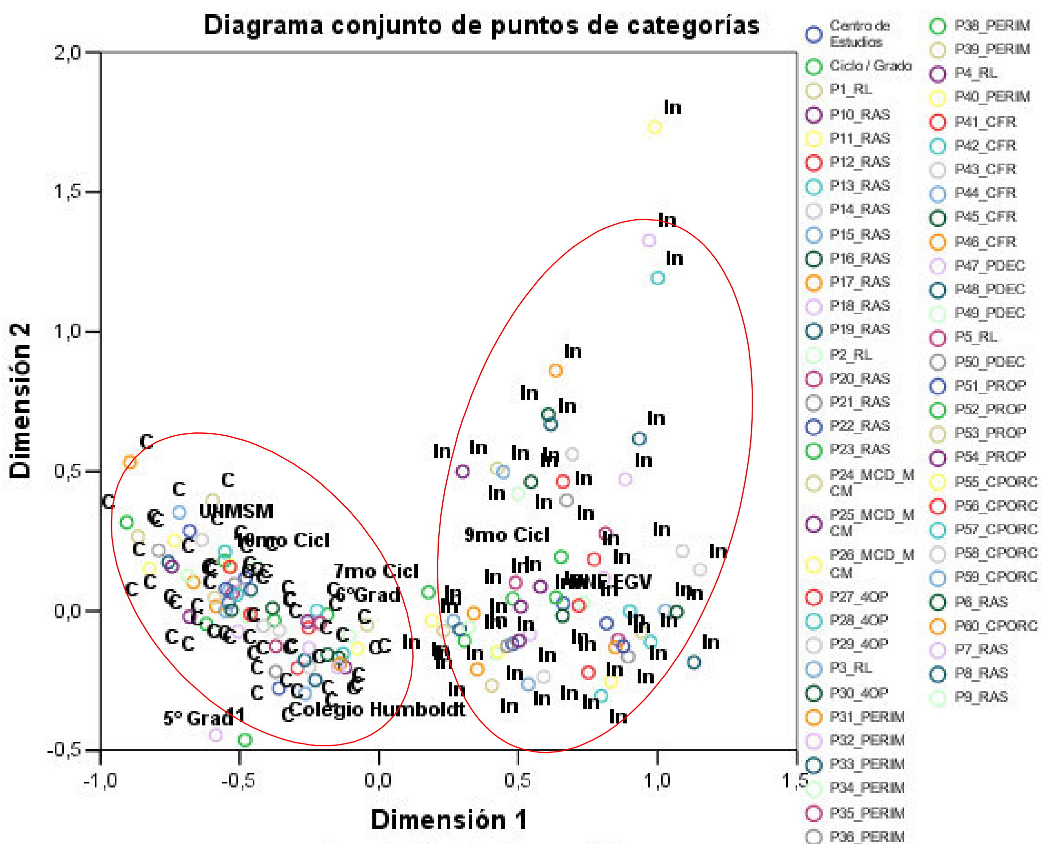
El siguiente diagrama de puntos-categorías se analiza con mayor énfasis sobre las respectivas categorías de interés y que son acompañadas con las respectivas variables suplementarias.

Análisis con las variables suplementarias

En el plano factorial adjunto (figura No 05) se establecen las categorías de las variables en estudio adicionadas con las variables suplementarias de interés, tales como, Centro de Estudios y Ciclo o Grado de estudios, en este sentido, se observa que los estudiantes de la “UNMSM” que son “10º y 7º ciclo” están más próximos con las respuestas correctas (“*C*”).

Se observa asimismo, que existe proximidad entre los que estudiantes que respondieron en forma incorrecta (“In”) y que están más próximos a los estudiantes de la UNE EGV y que son de 9 Ciclo. Podemos afirmar que tienen perfiles parecidos y que estos ítemes guardan relación.

Figura No 05



Los estudiantes regulares de primaria del colegio Humboldt respondieron a la prueba de razonamiento con similares resultados a los observados en los estudiantes de la UNMSM y además están relacionados con las respuestas correctas (Ver figura No 05).

En el plano factorial de la figura No 06, en el que se relaciona la tercera dimensión y la segunda, se observa que existen tres grupos marcadamente próximos y que están más correlacionados a cada par de categorías de interés ("*correctas*" e "*incorrectas*"), así los estudiantes de la UNMSM están más asociados a respuestas correctas, los de la UNE EGV están más asociados a las respuestas incorrectas.

Respecto a los estudiantes de 7º ciclo y el grupo de estudiantes del colegio Humboldt no muestran una definida relación, debido a que la tercera dimensión no presta mayor comprensión y no discrimina con pesos importantes a las preguntas del estudio.

En el plano factorial de la figura No 07, en el que se relaciona la cuarta dimensión y la primera, se observa similares resultados a los observados anteriormente.

Figura No 06

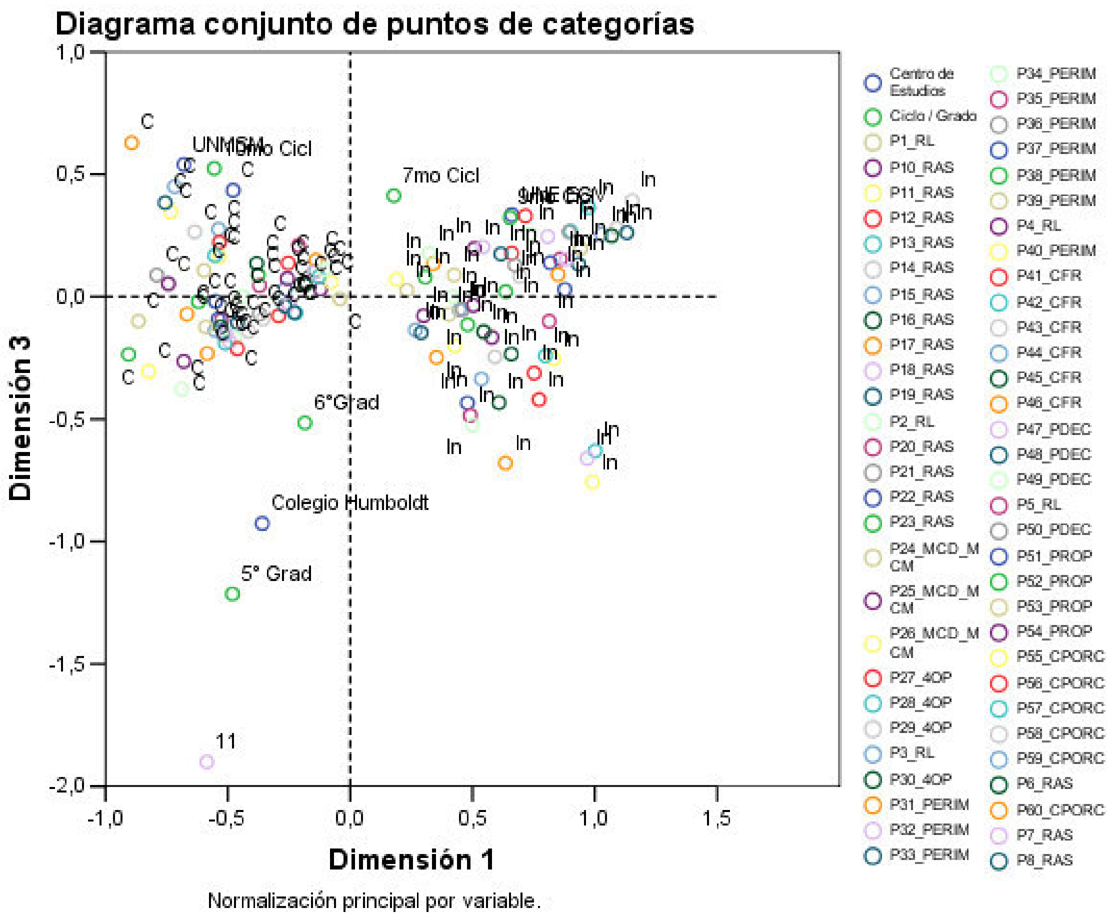


Figura Nº 7

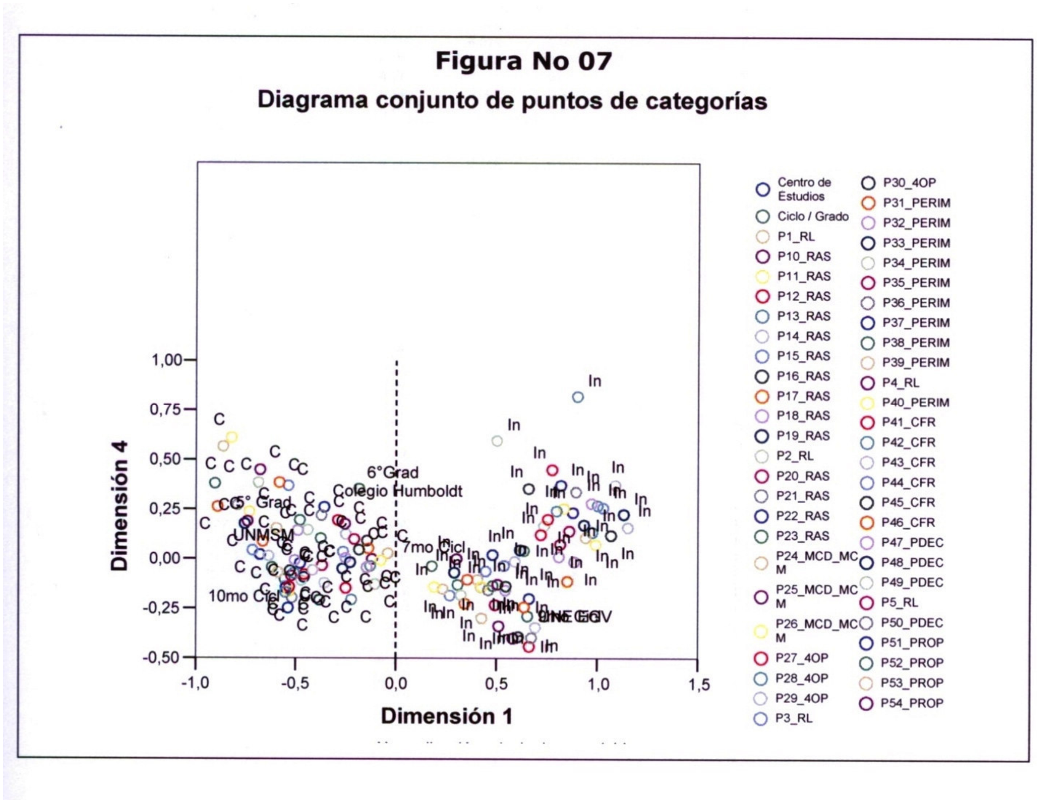


Figura No 07
Diagrama conjunto de puntos de categorías
Dimensión 4
Dimensión 1
1,00
0,75
0,50
0,25
0,00
-0,25
-0,50
-1,0
-0,5
0,0
0,5
1,0
1,5
6°Grad
Colegio Humboldt
5° Grad
UNMSM
7mo Cicl
10mo Cicl
Centro de Estudios
Ciclo / Grado
P1_RL
P10_RAS
P11_RAS
P12_RAS
P13_RAS
P14_RAS
P15_RAS
P16_RAS
P17_RAS
P18_RAS
P19_RAS
P2_RL
P20_RAS
P21_RAS
P22_RAS
P23_RAS
P24_MCD_MCM
P25_MCD_MCM
P26_MCD_MCM
P27_4OP
P28_4OP
P29_4OP
P3_RL
P30_4OP
P31_PERIM
P32_PERIM
P33_PERIM
P34_PERIM
P35_PERIM
P36_PERIM
P37_PERIM
P38_PERIM
P39_PERIM
P4_RL
P40_PERIM
P41_CFR
P42_CFR
P43_CFR
P44_CFR
P45_CFR
P46_CFR
P47_PDEC
P48_PDEC
P49_PDEC
P5_RL
P50_PDEC
P51_PROP
P52_PROP
P53_PROP
P54_PROP

Anexo ACM

Tabla No 01 Medidas de Discriminación

Preguntas	Dimensión				
	1	2	3	4	Media
P1_RL	0,018	**0,026**	0,001	0,008	0,013
P2_RL	**0,185**	0,025	0,000	0,022	0,058
P3_RL	**0,143**	0,003	0,037	0,069	0,063
P4_RL	**0,149**	0,003	0,012	0,073	0,059
P5_RL	**0,104**	0,004	0,102	0,021	0,058
P6_RAS	**0,101**	0,072	0,007	0,008	0,047
P7_RAS	**0,225**	0,064	0,028	0,002	0,080
P8_RAS	0,141	**0,166**	0,011	0,001	0,080
P9_RAS	0,053	0,037	0,058	**0,078**	0,057
P10_RAS	0,037	**0,101**	0,002	0,000	0,035
P11_RAS	0,076	**0,234**	0,045	0,001	0,089
P12_RAS	**0,193**	0,095	0,014	0,086	0,097
P13_RAS	0,129	**0,184**	0,051	0,010	0,094
P14_RAS	**0,173**	0,114	0,002	0,043	0,083
P15_RAS	0,118	**0,147**	0,002	0,002	0,067
P16_RAS	0,088	**0,118**	0,045	0,035	0,071
P17_RAS	0,089	**0,163**	0,102	0,013	0,092
P18_RAS	0,143	**0,269**	0,067	0,013	0,123
P19_RAS	**0,250**	0,109	0,005	0,008	0,093
P20_RAS	**0,302**	0,035	0,005	0,003	0,086
P21_RAS	**0,250**	0,086	0,009	0,088	0,108
P22_RAS	**0,229**	0,014	0,188	0,001	0,108
P23_RAS	**0,181**	0,002	0,010	0,013	0,051
P24_MCD_MCM	**0,241**	0,106	0,008	0,017	0,093
P25_MCD_MCM	**0,346**	0,000	0,052	0,152	0,138
P26_MCD_MCM	**0,313**	0,037	0,070	0,030	0,113
P27_4OP	**0,195**	0,011	0,058	0,070	0,084
P28_4OP	**0,201**	0,000	0,018	0,167	0,096
P29_4OP	**0,389**	0,015	0,026	0,044	0,119
P30_4OP	**0,252**	0,000	0,032	0,073	0,089
P31_PERIM	**0,198**	0,000	0,031	0,087	0,079
P32_PERIM	**0,267**	0,006	0,038	0,023	0,083
P33_PERIM	**0,520**	0,014	0,028	0,020	0,145
P34_PERIM	**0,347**	0,001	0,042	0,018	0,102
P35_PERIM	**0,451**	0,007	0,014	0,011	0,121
P36_PERIM	**0,464**	0,016	0,041	0,065	0,146
P37_PERIM	**0,441**	0,001	0,013	0,091	0,137
P38_PERIM	**0,278**	0,034	0,019	0,052	0,096
P39_PERIM	**0,200**	0,019	0,003	0,086	0,077
P40_PERIM	**0,156**	0,005	0,021	0,088	0,068
P41_CFR	**0,330**	0,000	0,070	0,008	0,102
P42_CFR	**0,497**	0,007	0,069	0,009	0,145
P43_CFR	**0,478**	0,008	0,056	0,008	0,137
P44_CFR	**0,567**	0,000	0,035	0,034	0,159
P45_CFR	**0,565**	0,000	0,031	0,007	0,151
P46_CFR	**0,566**	0,013	0,006	0,010	0,149
P47_PDEC	**0,409**	0,009	0,038	0,000	0,114
P48_PDEC	**0,219**	0,012	0,056	0,012	0,075
P49_PDEC	**0,222**	0,008	0,067	0,070	0,092
P50_PDEC	**0,364**	0,027	0,005	0,041	0,109
P51_PROP	**0,483**	0,010	0,001	0,035	0,132
P52_PROP	**0,394**	0,002	0,000	0,002	0,100
P53_PROP	**0,556**	0,004	0,024	0,007	0,148
P54_PROP	**0,374**	0,017	0,002	0,025	0,104
P55_CPORC	**0,445**	0,041	0,042	0,045	0,143
P56_CPORC	**0,402**	0,035	0,069	0,028	0,134
P57_CPORC	**0,441**	0,065	0,041	0,043	0,147
P58_CPORC	**0,376**	0,060	0,065	0,000	0,125
P59_CPORC	**0,384**	0,093	0,151	0,001	0,157
P60_CPORC	**0,315**	0,112	0,156	0,026	0,152

OTROS ANEXOS

ANALISIS DE VARIANZA (ANOVA)

Tabla A: Tabla ANOVA de las nueve capacidades de resolución de problemas según los centros de estudios.

ANOVA

		Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Capacidad de establecer relaciones lógicas	Inter-grupos	239.556	2	119.778	56.827	.000
	Intra-grupos	874.724	415	2.108		
	Total	1114.280	417			
Capacidad de establecer relaciones aritméticas simples	Inter-grupos	1339.064	2	669.532	21.495	.000
	Intra-grupos	12926.534	415	31.148		
	Total	14265.598	417			
Capacidad de resolver problemas con los conceptos del MCD y MCM	Inter-grupos	89.333	2	44.666	54.046	.000
	Intra-grupos	342.976	415	.826		
	Total	432.309	417			
Capacidad de manejar la terminología técnica de las cuatro operaciones	Inter-grupos	45.940	2	22.970	7.656	.001
	Intra-grupos	1245.048	415	3.000		
	Total	1290.988	417			
Capacidad de establecer el perímetro y el área del cuadrado y del rectángulo	Inter-grupos	541.544	2	270.772	35.113	.000
	Intra-grupos	3200.217	415	7.711		
	Total	3741.761	417			
Capacidad de trabajar el concepto de fracción con el uso de operadores	Inter-grupos	269.548	2	134.774	25.343	.000
	Intra-grupos	2206.949	415	5.318		
	Total	2476.498	417			
Capacidad de manejar problemas con decimales	Inter-grupos	49.606	2	24.803	18.189	.000
	Intra-grupos	565.898	415	1.364		
	Total	615.505	417			
Capacidad de establecer proporciones	Inter-grupos	166.722	2	83.361	36.820	.000
	Intra-grupos	939.558	415	2.264		
	Total	1106.280	417			
Capacidad de manejar el concepto de porcentaje	Inter-grupos	232.501	2	116.251	25.382	.000
	Intra-grupos	1900.726	415	4.580		
	Total	2133.227	417			

Tabla B: Comparación del rendimiento promedio obtenido en las nueve capacidades de resolución de problemas según los centros de estudios

Comparaciones múltiples

Bonferroni

Variable dependiente	(I) Centro de Estudios	(J) Centro de Estudios	Diferencia de medias (I-J)	Error típico	Sig.	Intervalo de confianza al 95%	
						Límite inferior	Límite superior
Capacidad de establecer relaciones lógicas	UNE EGV	UNMSM	-1.468*	.213	.000	-1.98	-.95
		Colegio Humboldt	-.601*	.202	.010	-1.09	-.11
	UNMSM	UNE EGV	1.468*	.213	.000	.95	1.98
		Colegio Humboldt	.866*	.229	.001	.31	1.42
	Colegio Humboldt	UNE EGV	.601*	.202	.010	.11	1.09
		UNMSM	-.866*	.229	.001	-1.42	-.31
Capacidad de establecer relaciones aritméticas simples	UNE EGV	UNMSM	-3.839*	.659	.000	-5.43	-2.25
		Colegio Humboldt	-2.975*	.626	.000	-4.49	-1.46
	UNMSM	UNE EGV	3.839*	.659	.000	2.25	5.43
		Colegio Humboldt	.864	.708	.673	-.85	2.58
	Colegio Humboldt	UNE EGV	2.975*	.626	.000	1.46	4.49
		UNMSM	-.864	.708	.673	-2.58	.85
Capacidad de resolver problemas con los conceptos del MCD y MCM	UNE EGV	UNMSM	-1.268*	.176	.000	-1.69	-.84
		Colegio Humboldt	-.980*	.167	.000	-1.38	-.57
	UNMSM	UNE EGV	1.268*	.176	.000	.84	1.69
		Colegio Humboldt	.288	.189	.389	-.17	.75
	Colegio Humboldt	UNE EGV	.980*	.167	.000	.57	1.38
		UNMSM	-.288	.189	.389	-.75	.17
Capacidad de manejar la terminología técnica de las cuatro operaciones	UNE EGV	UNMSM	-1.388*	.224	.000	-1.93	-.85
		Colegio Humboldt	-.804*	.213	.001	-1.32	-.29
	UNMSM	UNE EGV	1.388*	.224	.000	.85	1.93
		Colegio Humboldt	.584*	.241	.049	.00	1.17
	Colegio Humboldt	UNE EGV	.804*	.213	.001	.29	1.32
		UNMSM	-.584*	.241	.049	-1.17	.00
Capacidad de establecer el perímetro y el área del cuadrado y del rectángulo	UNE EGV	UNMSM	-3.682*	.482	.000	-4.85	-2.52
		Colegio Humboldt	-3.342*	.458	.000	-4.45	-2.23
	UNMSM	UNE EGV	3.682*	.482	.000	2.52	4.85
		Colegio Humboldt	.340	.518	1.000	-.91	1.59
	Colegio Humboldt	UNE EGV	3.342*	.458	.000	2.23	4.45
		UNMSM	-.340	.518	1.000	-1.59	.91
Capacidad de trabajar el concepto de fracción con el uso de operadores	UNE EGV	UNMSM	-2.435*	.369	.000	-3.33	-1.54
		Colegio Humboldt	-2.528*	.350	.000	-3.38	-1.68
	UNMSM	UNE EGV	2.435*	.369	.000	1.54	3.33
		Colegio Humboldt	-.093	.396	1.000	-1.05	.87
	Colegio Humboldt	UNE EGV	2.528*	.350	.000	1.68	3.38
		UNMSM	.093	.396	1.000	-.87	1.05
Capacidad de manejar problemas con decimales	UNE EGV	UNMSM	-1.135*	.239	.000	-1.71	-.56
		Colegio Humboldt	-1.061*	.227	.000	-1.61	-.51
	UNMSM	UNE EGV	1.135*	.239	.000	.56	1.71
		Colegio Humboldt	.073	.257	1.000	-.55	.70
	Colegio Humboldt	UNE EGV	1.061*	.227	.000	.51	1.61
		UNMSM	-.073	.257	1.000	-.70	.55
Capacidad de establecer proporciones	UNE EGV	UNMSM	-1.453*	.277	.000	-2.12	-.78
		Colegio Humboldt	-1.079*	.263	.000	-1.72	-.44
	UNMSM	UNE EGV	1.453*	.277	.000	.78	2.12
		Colegio Humboldt	.374	.298	.632	-.35	1.09
	Colegio Humboldt	UNE EGV	1.079*	.263	.000	.44	1.72
		UNMSM	-.374	.298	.632	-1.09	.35
Capacidad de manejar el concepto de porcentaje	UNE EGV	UNMSM	-2.730*	.388	.000	-3.67	-1.79
		Colegio Humboldt	-.829	.369	.078	-1.72	.06
	UNMSM	UNE EGV	2.730*	.388	.000	1.79	3.67
		Colegio Humboldt	1.901*	.417	.000	.89	2.91
	Colegio Humboldt	UNE EGV	.829	.369	.078	-.06	1.72
		UNMSM	-1.901*	.417	.000	-2.91	-.89

*. La diferencia entre las medias es significativa al nivel .05.

Tabla C: Tabla ANOVA de las nueve capacidades de resolución de problemas según los centros de estudios.

ANOVA

		Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Capacidad de establecer relaciones lógicas	Inter-grupos	58.091	2	29.045	23.731	.000
	Intra-grupos	199.500	163	1.224		
	Total	257.590	165			
Capacidad de establecer relaciones aritméticas simples	Inter-grupos	480.591	2	240.295	20.552	.000
	Intra-grupos	1905.843	163	11.692		
	Total	2386.434	165			
Capacidad de resolver problemas con los conceptos del MCD y MCM	Inter-grupos	52.299	2	26.150	31.309	.000
	Intra-grupos	136.141	163	.835		
	Total	188.440	165			
Capacidad de manejar la terminología técnica de las cuatro operaciones	Inter-grupos	54.707	2	27.354	20.203	.000
	Intra-grupos	220.690	163	1.354		
	Total	275.398	165			
Capacidad de establecer el perímetro y el área del cuadrado y del rectángulo	Inter-grupos	501.555	2	250.778	40.070	.000
	Intra-grupos	1020.138	163	6.259		
	Total	1521.693	165			
Capacidad de trabajar el concepto de fracción con el uso de operadores	Inter-grupos	252.018	2	126.009	34.372	.000
	Intra-grupos	597.572	163	3.666		
	Total	849.590	165			
Capacidad de manejar problemas con decimales	Inter-grupos	48.999	2	24.499	15.879	.000
	Intra-grupos	251.483	163	1.543		
	Total	300.482	165			
Capacidad de establecer proporciones	Inter-grupos	66.997	2	33.498	16.211	.000
	Intra-grupos	336.816	163	2.066		
	Total	403.813	165			
Capacidad de manejar el concepto de porcentaje	Inter-grupos	201.986	2	100.993	24.870	.000
	Intra-grupos	661.917	163	4.061		
	Total	863.904	165			

Tabla D: Comparación del rendimiento promedio obtenido en las nueve capacidades de resolución de problemas respecto de las estrategias empleadas según los centros de estudios

Comparaciones múltiples

Bonferroni

Variable dependiente	(I) Centro de Estudios	(J) Centro de Estudios	Diferencia de medias (I-J)	Error típico	Sig.	Intervalo de confianza al 95% Límite inferior	Límite superior
Capacidad de establecer relaciones lógicas	UNE EGV	UNMSM	-1.468*	.213	.000	-1.98	-.95
		Colegio Humboldt	-.601*	.202	.010	-1.09	-.11
	UNMSM	UNE EGV	1.468*	.213	.000	.95	1.98
		Colegio Humboldt	.866*	.229	.001	.31	1.42
	Colegio Humboldt	UNE EGV	.601*	.202	.010	.11	1.09
		UNMSM	-.866*	.229	.001	-1.42	-.31
Capacidad de establecer relaciones aritméticas simples	UNE EGV	UNMSM	-3.839*	.659	.000	-5.43	-2.25
		Colegio Humboldt	-2.975*	.626	.000	-4.49	-1.46
	UNMSM	UNE EGV	3.839*	.659	.000	2.25	5.43
		Colegio Humboldt	.864	.708	.673	-.85	2.58
	Colegio Humboldt	UNE EGV	2.975*	.626	.000	1.46	4.49
		UNMSM	-.864	.708	.673	-2.58	.85
Capacidad de resolver problemas con los conceptos del MCD y MCM	UNE EGV	UNMSM	-1.268*	.176	.000	-1.69	-.84
		Colegio Humboldt	-.980*	.167	.000	-1.38	-.57
	UNMSM	UNE EGV	1.268*	.176	.000	.84	1.69
		Colegio Humboldt	.288	.189	.389	-.17	.75
	Colegio Humboldt	UNE EGV	.980*	.167	.000	.57	1.38
		UNMSM	-.288	.189	.389	-.75	.17
Capacidad de manejar la terminología técnica de las cuatro operaciones	UNE EGV	UNMSM	-1.388*	.224	.000	-1.93	-.85
		Colegio Humboldt	-.804*	.213	.001	-1.32	-.29
	UNMSM	UNE EGV	1.388*	.224	.000	.85	1.93
		Colegio Humboldt	.584*	.241	.049	.00	1.17
	Colegio Humboldt	UNE EGV	.804*	.213	.001	.29	1.32
		UNMSM	-.584*	.241	.049	-1.17	.00
Capacidad de establecer el perímetro y el área del cuadrado y del rectángulo	UNE EGV	UNMSM	-3.682*	.482	.000	-4.85	-2.52
		Colegio Humboldt	-3.342*	.458	.000	-4.45	-2.23
	UNMSM	UNE EGV	3.682*	.482	.000	2.52	4.85
		Colegio Humboldt	.340	.518	1.000	-.91	1.59
	Colegio Humboldt	UNE EGV	3.342*	.458	.000	2.23	4.45
		UNMSM	-.340	.518	1.000	-1.59	.91
Capacidad de trabajar el concepto de fracción con el uso de operadores	UNE EGV	UNMSM	-2.435*	.369	.000	-3.33	-1.54
		Colegio Humboldt	-2.528*	.350	.000	-3.38	-1.68
	UNMSM	UNE EGV	2.435*	.369	.000	1.54	3.33
		Colegio Humboldt	-.093	.396	1.000	-1.05	.87
	Colegio Humboldt	UNE EGV	2.528*	.350	.000	1.68	3.38
		UNMSM	.093	.396	1.000	-.87	1.05
Capacidad de manejar problemas con decimales	UNE EGV	UNMSM	-1.135*	.239	.000	-1.71	-.56
		Colegio Humboldt	-1.061*	.227	.000	-1.61	-.51
	UNMSM	UNE EGV	1.135*	.239	.000	.56	1.71
		Colegio Humboldt	.073	.257	1.000	-.55	.70
	Colegio Humboldt	UNE EGV	1.061*	.227	.000	.51	1.61
		UNMSM	-.073	.257	1.000	-.70	.55
Capacidad de establecer proporciones	UNE EGV	UNMSM	-1.453*	.277	.000	-2.12	-.78
		Colegio Humboldt	-1.079*	.263	.000	-1.72	-.44
	UNMSM	UNE EGV	1.453*	.277	.000	.78	2.12
		Colegio Humboldt	.374	.298	.632	-.35	1.09
	Colegio Humboldt	UNE EGV	1.079*	.263	.000	.44	1.72
		UNMSM	-.374	.298	.632	-1.09	.35
Capacidad de manejar el concepto de porcentaje	UNE EGV	UNMSM	-2.730*	.388	.000	-3.67	-1.79
		Colegio Humboldt	-.829	.369	.078	-1.72	.06
	UNMSM	UNE EGV	2.730*	.388	.000	1.79	3.67
		Colegio Humboldt	1.901*	.417	.000	.89	2.91
	Colegio Humboldt	UNE EGV	.829	.369	.078	-.06	1.72
		UNMSM	-1.901*	.417	.000	-2.91	-.89

*. La diferencia entre las medias es significativa al nivel .05.

7.3. Conclusiones de los resultados del trabajo de campo

1. El instrumento evaluado "Prueba de razonamiento matemático" produce un elevado consenso de confiabilidad. alfa de Cronbach y admite la existencia de una relación como base para medir el rendimiento en los estudiantes en la solución de problemas.

2. Sobre el rendimiento observado en la resolución de problemas en los estudiantes de los dos centros de estudios se tiene que:

   a. Los estudiantes de la Especialidad de Primaria de la UNMSM revelan en general un alto rendimiento sobre la resolución de problemas tanto en el Pre como en el Post test, pero en particular nos referimos a los estudiantes del 7mo ciclo. Pudo también comprobarse que el curso de "Didáctica de la Matemática III" tuvo efectos positivos y significativos en todos los grupos.

   b. Los estudiantes de la UNE – EGV reflejan los más bajos rendimientos promedios y revelan que sus estrategias para resolver problemas de matemática son limitadas.

3. El rendimiento medio en los estudiantes del Colegio Humboldt, estudiantes que nos sirvieron de referencia para controlar la aplicación del currículo propuesto a un centro escolar, revela que los efectos del método aplicado en un curso anual son similares a los de los estudiantes de la UNMSM. Pero una particularidad que se observó, revela que los estudiantes del Humboldt no refieren el uso explícito de métodos y estrategias para la resolución de problemas como lo hacen los estudiantes de la UNMSM. Por tanto, concluimos que los estudiantes del Humboldt obtuvieron buen rendimiento con el uso de habilidades de razonamiento y calculo mental que no explicitaron por escrito. Además los escolares destacaron con el más alto puntaje en la "Capacidad de trabajar el concepto de fracción con el uso de operadores" que es una estrategia ampliamente utilizada por ellos, que simplifica la resolución de los problemas de multiplicación y división de fracciones pero cuyo uso no es muy difundido a nivel de nuestra comunidad educativa, por lo cual era una novedad para los universitarios que tomaron el curso, y aunque la comprendieron, no llegaron a asimilarla plenamente.

4. La validez interna observada en el instrumento es concreta y objetiva desde que los parámetros de las respuestas correctas e incorrectas se agrupan separando las categorías subyacentes que describen la realidad prevista en cada grupo de estudiantes, obteniendo la máxima cantidad de información explicada con un mínimo de variables.

5. Puede concluirse que el método de la clase centrado en problemas influye significativamente en el rendimiento de los alumnos participantes en el curso de "Didáctica III", focalizado en estrategias didácticas para la resolución de problemas.

CONCLUSIONES GENERALES

1. Esta tesis se propuso llevar a cabo una investigación en educación matemática que atendiese a los problemas que realmente tienen los profesores en su práctica cotidiana, de modo que sus resultados fuesen de alguna utilidad, tanto a profesores como a estudiantes de pre-grado de la Especialidad de Primaria. Para lograrlo planteamos un trabajo de investigación con una nueva perspectiva donde el investigador jugase un papel más activo. Sabemos que hasta los años 80, el mundo de la enseñanza de la matemática aparecía como un sistema de variables interactivas y el propósito de la investigación era describir esas variables, descubrir sus interrelaciones y tratar de manipular algunas de ellas para provocar cambios en las otras. En nuestro caso, después de una investigación documentada, nos avocamos no sólo a detectar sino también a enfrentar las dificultades que tienen los profesores de primaria para resolver y explicar problemas que corresponden al currículo de 5º y 6º grado de primaria.

2. Es así como en respuesta a los problemas detectados, la tesis fundamenta un currículo para el 5º y 6º grado centrado en la resolución de problemas, más que en la ejecución de algoritmos. De este modo, la enseñanza de la clase de matemática de 5º y 6º grado, se basa en el análisis de problemas matemáticos por razonamiento analógico e inferencial y a partir de ellos en la comprensión de los conceptos involucrados, más que en la ejecución de algoritmos. Entendemos el algoritmo como un conjunto de procedimientos que constan de una secuencia de pasos cuya aplicación garantiza una respuesta concluyente.

3. Al presentar los conceptos a través de problemas, hemos tenido en cuenta que un concepto matemático es un objeto complejo, que se forma en un largo periodo de tiempo, pero que además comporta y está asociado a una diversidad de propiedades afines y sólo es comprensible a través de una adecuada muestra de problemas. Sin las situaciones problémicas que le dan sentido, un concepto matemático no es nada y carece de significado concreto para el estudiante. Por eso hemos propuesto en la guía didáctica del curso, una contextualización adecuada para cada uno de los conceptos del currículo de 5º y 6º grado.

4. El análisis de numerosos problemas matemáticos en el informe de este trabajo de investigación, nos lleva a concluir que un problema es un conjunto de proposiciones que requiere sobre todo para su solución del análisis del lenguaje usual y del conocimiento de conceptos matemáticos específicos pero también, tanto de una documentada base de datos, con problemas modelo para resolver por razonamiento analógico, como de un conjunto de estrategias de representación para enfrentar problemas nuevos. Además, siempre y cuando no aceptemos el uso irrestricto de la calculadora, son también necesarios el conocimiento de los algoritmos para resolver las operaciones indicadas o al menos, el conocimiento del cálculo mental para resolver ágilmente sin necesidad de aplicar la técnica operativa por escrito.

5. Los pasos que hemos considerado en nuestro trabajo para la solución de un problema son en primer lugar, la lectura y el análisis del problema, cuyo contenido puede darse en diversos formatos. En segundo lugar, la representación mental o gráfica del problema para establecer una relación lógica entre los datos y la incógnita y lograr una traducción simbólica adecuada en el lenguaje matemático. En tercer lugar, la ejecución de las operaciones indicadas en el lenguaje matemático, aunque este paso puede obviarse si se utiliza la calculadora. En cuarto lugar, la determinación y el análisis de la solución con miras a conservar "la memoria de las soluciones", para formar la base de datos personalizada y analizar con éxito problemas similares en el futuro.

6. En nuestra opinión, la clave del problema está en la lectura adecuada y el cuidadoso análisis y selección de los datos relevantes, que conducen al estudiante a una correcta traducción que le permite relacionar correctamente los datos y la incógnita. Lo demás es simple ejecución y correcto "archivo de las soluciones" para enfrentar nuevos casos.

7. Para una rápida y correcta traducción del problema es necesario poseer una base de datos considerable. Tal como el músico domina una gran cantidad de estructuras musicales y las combina, el estudiante de matemática debe poseer una gran cantidad de estructuras matemáticas correspondientes a problemas analizados y conservados en "la memoria de las soluciones" para evocarlos y combinar soluciones adecuadas.

8. Por tanto, juega un papel decisivo el estudio de las diversas estrategias de solución. El estudiante no puede aspirar a conocer todos los problemas posibles pero sí las diversas estrategias para afrontar los problemas más frecuentes según los diversos campos conceptuales de problemas en el currículo. Si nos concretamos al currículo de 5º y 6º es posible abarcar con provecho, un conjunto numeroso de estrategias, tal y como el que proponemos en esta tesis y en forma más completa, en la guía del estudiante.

9. Pero es también decisivo que el maestro domine los diversos significados de los campos conceptuales del currículo para que enriquezca la presentación y elaboración de los problemas presentados. Especialmente es útil el dominio de los significados que hemos analizado en los campos aditivo y multiplicativo, que puede extenderse de los números naturales a los números racionales y, de los problemas de una sola operación a los problemas de operaciones combinadas.

10. El objetivo experimental de la tesis que consistía en probar el impacto de la metodología propuesta en el rendimiento de los estudiantes de pre-grado en la resolución de problemas, ha sido demostrado gracias al concurso de las dos promociones de alumnos de pre-grado de las Bases 2003 y 2002 de la Especialidad de Primaria de la EAP de la UNMSM, que actuaron como grupo experimental y a la participación de un grupo de 72 estudiantes de la UNE "Enrique Guzmán y Valle", que actuaron como grupo de control.

11. Con la participación de los grupos mencionados, se ha comprobado que nuestro método de análisis de problemas y el uso de las estrategias didácticas propuestas en el curso "Didáctica de la matemática III" para abarcar los diversos campos de problemas sugeridos en el diseño curricular, posibilita un rendimiento más alto en la resolución de problemas y que con los ejercicios propuestos se ha dado un grado de asimilación adecuado de las técnicas y sugerencias recomendadas.

12. Finalmente cabe añadir que el curso "Didáctica de la matemática III" se llevó a cabo por tercera vez en el primer semestre del 2007 con 34 estudiantes regulares de la Especialidad de Primaria de la Base 2004 de la EAP de la Facultad de Educación de la UNMSM con resultados altamente favorables.[1] Esto nos lleva a concluir que la guía completa, que ahora consta de 487 páginas y el DVD elaborado en page maker con las 13 lecciones, está validado y listo para ser aplicado por otros profesores universitarios de la especialidad. Incluso en esta tercera ejecución hemos elaborado un material complementario, el Manual de prácticas, destinado a controlar semanalmente el aprendizaje gradual de los jóvenes universitarios en tres áreas: asimilación y enseñanza de conceptos, práctica operativa aplicando reglas y propiedades matemáticas y resolución de problemas. Del mismo modo, todos los usuarios del método contarán en breve, como material de apoyo y consulta en el futuro, con el desarrollo completo del nuevo curso escolar para 5º y 6º grado, basado en el mismo método que hemos reformulado con la ayuda de la licenciada Carmen Cuenca, el mismo que hemos validado durante el 2006 y 2007 en el aula escolar y está listo para ser editado por la Editora Universitaria Latina.

[1] Se adjunta breve informe de esta nueva aplicación en las pp 259-260 de esta tesis

RECOMENDACIONES

1. En la presente investigación se observa que cada dimensión analizada contribuye de manera diferenciada sobre el proceso de medición del rendimiento en los estudiantes universitarios, lo cual posibilita diferenciar claramente a dos grupos respecto al rendimiento en la resolución de problemas: los estudiantes de la UNMSM, que alcanzaron un nivel adecuado y los estudiantes de la UNE-EGV, que obtuvieron un rendimiento no satisfactorio en las diversas áreas evaluadas.

   Dado que los primeros tomaron un curso donde se propusieron y analizaron a través de un método problemas matemáticos, centrando la clase en los conceptos correspondientes al diseño curricular de 5º y 6º grado y los otros no lo hicieron, **recomendamos que todo estudiante de la Especialidad de Primaria, lleve un tercer curso de Didáctica de la Matemática que abarque el análisis de problemas correspondientes a los conceptos propuestos por el currículo nacional para el 5º y 6º grado, bajo la guía de un método.**

   Hacemos esta recomendación porque en nuestra opinión, todo estudiante de nuestra especialidad, debería analizar problemas a partir del diseño curricular para mejorar su comprensión lectora y aplicar los nuevos formatos de presentación de los mismos, perfeccionar su capacidad de análisis y razonamiento matemático, conocer nuevas estrategias creativas para vincular los datos con la incógnita y organizar su base de datos, con miras a una recuperación adecuada de las soluciones para incrementar paulatinamente su capacidad de resolución de problemas. **Sólo así podrá ser el maestro mediador que requieren nuestros escolares para analizar y resolver problemas matemáticos y mejorar su capacidad de razonamiento lógico.**

2. Sobre la metodología propuesta, el ACM provee aún una mejor representación que esta presentación parsimoniosa de los datos si **el número de estudiantes se incrementa**. Sin embargo dado que toda la población de estudiantes aptos para el curso hasta enero del 2007 era reducida, estamos confirmando la investigación con los resultados de la aplicación del método a la Base 2004, compuesta por 34 nuevos estudiantes que cumplen todos los requisitos formales, de modo que ahora tenemos en total 77 estudiantes de la especialidad para nuestro grupo experimental. Los resultados de los nuevos 34 alumnos han sido aún más favorables que con las dos bases anteriores, pues nuestro trabajo se ha complementado con una nueva guía de estudio, un eficiente sistema de prácticas calificadas, que ha obligado al estudiante a revisar semanalmente sus materiales, tanto para el dominio de conceptos y estrategias operativas como para el análisis estratégico de problemas.

3. La contribución fundamental que aporta el ACM explica que las fuentes de variación observada, no son atribuibles a las muestras de estudiantes y a su vez, tiene mayor alcance analítico que los tradicionales métodos de reducción basados en la dimensión de variables y con propiedades numéricas. Asimismo indica que el análisis de la primera dimensión, sobre capacidad para establecer relaciones lógicas, es la más importante teniendo en cuenta la naturaleza de las respuestas correctas e incorrectas.
   Si lo que distingue el rendimiento de ambos grupos es sobre todo **su capacidad para establecer relaciones lógicas, porque ésta es la que está mejor correlacionada con todas las demás,** recomendamos que los cursos de matemática le den al estudiante de pre-grado material elaborado para desarrollarla, semejante al que proponemos.

4. Recomendamos **tomar los resultados como elementos referenciales** (basales) y no determinantes de los niveles de rendimiento en estos grupos de estudiantes, tanto en la evaluación de la eficiencia del Curso de Didáctica de la Matemática III, como en las mediciones de descriptivas del rendimiento medio; por que no se tienen evidencias anteriores o estudios especializados. De otro lado, como ya se planteó anteriormente, esta información corresponde a toda una población de estudiantes matriculados (pilotos) en un método pionero, cuya última fase se aplica por tercera vez a una población de estudiantes de pre-grado, habiendo sido aplicado anteriormente en forma parcial, sólo a maestros graduados en cursos de capacitación.

5. En base a los problemas de rendimiento identificados en los estudiantes de la UNE – EGV, diseñar cursos estratégicos en temas específicos sobre resolución de problemas de razonamiento matemático, con un **mayor número de horas** que permitan subsanar las deficiencias encontradas. Particularmente los estudiantes de pre-grado tuvieron dificultad en el manejo de **divisibilidad, fracciones, decimales y proporcionalidad.**

6. Los niveles de rendimiento obtenidos, tanto en los estudiantes regulares del colegio Humboldt como en los estudiantes de la UNMSM, sirvan para **establecer los umbrales para los criterios de valoración de los estándares e indicadores** de evaluación del rendimiento, en el caso de planificar la aplicación sistemática del método. Esta acción se ha iniciado con la base 2004, incrementándose el material, que constaba de 12 unidades, con una unidad adicional, y con un material ad hoc de evaluación compuesto por 12 prácticas tanto para la asimilación de los conceptos y la metodología como para la resolución de problemas del currículo de 5º y 6º.

7. **Seguir realizando periódicamente evaluaciones con el instrumento validado** y fiable en estudiantes universitarios de la especialidad de Primaria, e ir ampliando progresivamente este tipo de mediciones en otras Universidades con interés en la materia propuesta. La experiencia de intervención en la UNE EGV ha sido positiva puesto que los alumnos tenían interés en conocer su nivel de eficiencia en comparación a otros centros de estudio para mejorar su formación.

8. Con la información disponible es posible ***retroalimentar*** a todas las Direcciones de las Escuelas Académicos profesionales, participantes del estudio como no participantes, para que sirva como fuente de comparación y estimulo positivo entre ellas.

9. Se hace evidente la necesidad de **complementar estos resultados con metodologías que evalúen otros factores socioeconómicos, demográficos y culturales**, que nos lleven a esclarecer algunas incógnitas que quedan a la luz de los resultados puesto que el presente estudio no ha hecho un análisis socioeconómico y cultural de los participantes, limitándose a seleccionar un sector que corresponde en los tres casos a la clase media, de medianos y bajos recursos puesto que los alumnos del colegio particular son becados en un 90% de los casos y los universitarios estudian en una universidad estatal que ofrece instrucción gratuita. Cabe plantear una nueva investigación, por ejemplo, con estudiantes de pre-grado de universidades particulares provenientes de colegios particulares de buen nivel académico, y que no tendrían como los investigados, la necesidad de reconstruir sobre nuevas bases metodológicas, sus estudios escolares de matemática de 5º y 6º grado de primaria, reconstrucción obligada que realizan estimulados por el impulso de un nuevo método, que los lleva a redescubrir conceptos y relaciones que olvidaron porque aprendieron de memoria.

BREVE INFORME SOBRE EL ESTUDIO CON LA BASE 2004

I. Terminada la tesis en marzo del 2007, iniciamos la aplicación del método a la Base 2004 de la Especialidad de Primaria de la EAP de la Facultad de Educación de la UNMSM durante los meses de abril a julio del 2007. Este grupo estaba conformado por 34 alumnos que llevaron el curso de DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA III, tal como la Base 2003 en el 7º ciclo regular.

II. Se perfeccionó la aplicación del método en el sentido de desarrollar 12 prácticas que comprendían :

1. Un trabajo grupal de resolución de problemas. (Nota promedio: 14,2).
2. Una exposición teórica individual de una parte del método. (NP: 16,3)
3. Un trabajo de elaboración de problemas según indicaciones específicas. (NP: 16,7)
4. Ocho prácticas semanales que evaluaban diversas competencias relacionadas con los siguientes temas:

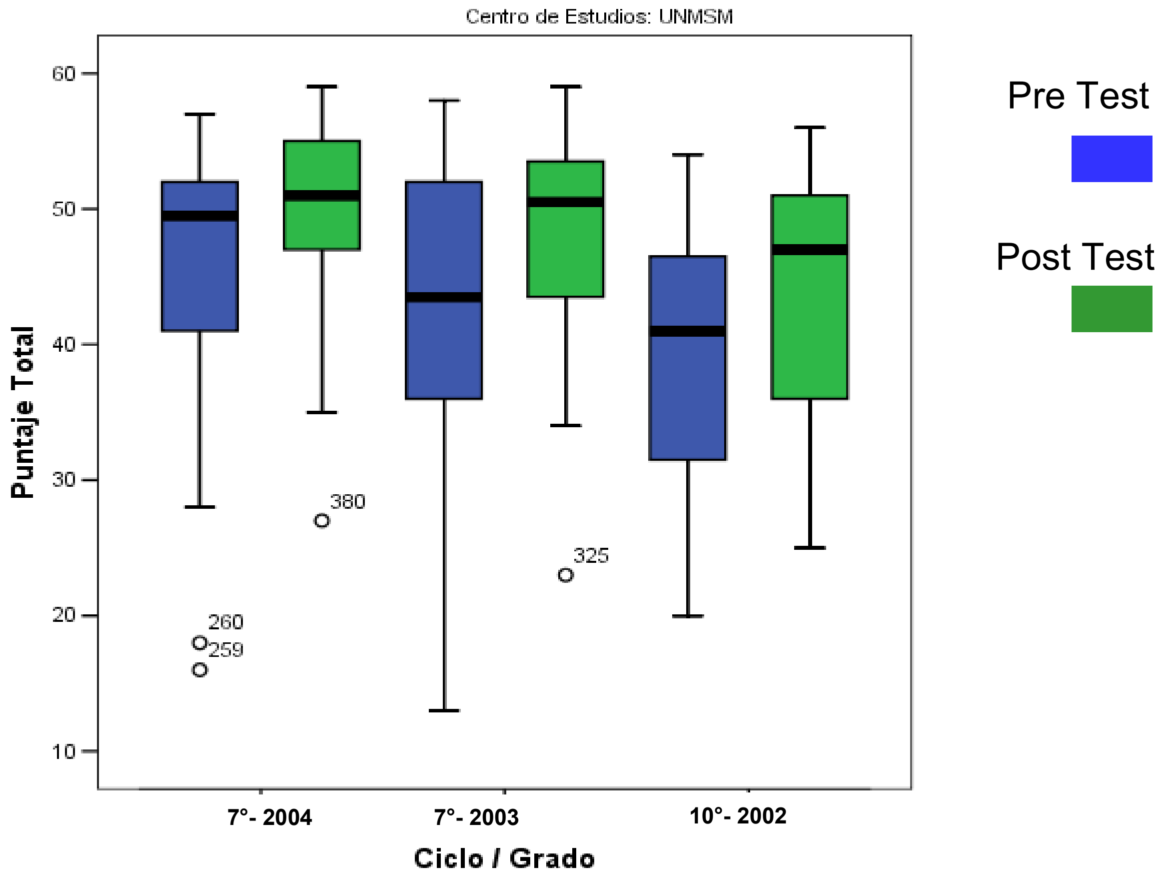
   a) Problemas con conjuntos. (NP: 16).
   b) Problemas de numeración (NP: 13,9).
   c) Problemas del campo aditivo. (NP: 15,6).
   d) Problemas del campo multiplicativo. (NP: 14,7)
   e) Divisibilidad e introducción a las fracciones. (NP: 14,1).
   f) Campo aditivo de las fracciones. (NP: 14,5).
   g) Campo multiplicativo de las fracciones. (NP: 13,6)
   h) Campo de los decimales. (NP: 13,4)

III. En la primera clase aplicamos la prueba general del pre – test y en la última clase, la prueba del post – test. Adjuntamos los resultados de esta prueba. En primer lugar las tablas comparativas del rendimiento promedio según tipo de test y luego el cuadro del rendimiento mediano con el gráfico de cajas.

Rendimiento promedio en los tres grupos de estudiantes, según tipo de test

Centro de Estudios	Ciclo / Grado	Test	Media	Desv. típ.	N
UNE EGV	7	Post test	26.49	13.59	41
	9	Post test	26.39	14.74	31
	Total	Post test	26.44	13.99	72
UNMSM	ciclo 7 - 2003	Pre test	42.65	12.09	20
		Post test	47.75	9.14	20
	ciclo 10 - 2002	Pre test	38.91	10.81	23
		Post test	44.00	9.31	23
	ciclo 7 - 2004	Pre test	44.82	10.35	34
		Post test	50.24	6.60	33
	Total	Pre test	42.49	11.10	77
		Post test	47.70	8.50	76
Colegio Humboldt	5	Post test	42.90	7.81	30
	6	Post test	38.38	10.69	21
	Total	Post test	41.04	9.28	51

Rendimiento mediano en los estudiantes de la UNMSM, según tipo de test



IV. Con esta nueva ampliación de la investigación tenemos 149 alumnos universitarios[1]:

- 77 alumnos para el grupo experimental de las Bases 2002, 2003 y 2004 de la Especialidad de Primaria de la EAP de Educación de la UNMSM.
- 72 alumnos para el grupo de control, alumnos del 7º y 9º ciclo de la UNEGV durante el 2006.

[1] En total serían 200 participantes si contamos a los 51 estudiantes del Colegio "Alexander von Humboldt" a los que también se les administró la prueba por ser usuarios directos del método.

9. ANEXOS

9.1 MATRIZ DE CONSISTENCIA

TÍTULO: Estrategias didácticas para una **enseñanza de la matemática centrada en la resolución de problemas** presentadas en el curso "Didáctica de la matemática III" de la Especialidad de Primaria de la EAP de Educación de la UNMSM

GRADUANDA: Martha María Antonieta Ramírez Delfín

PROBLEMAS	OBJETIVO	HIPÓTESIS
1.1 **Problema**	2.1 **Objetivo General**	3.1 **Hipótesis General**
¿En qué medida la metodología basada en estrategias didácticas para una enseñanza de la matemática centrada en la resolución de problemas propuesta en el silabo "Didáctica de la Matemática III" tiene un impacto en el rendimiento para resolver problemas de los alumnos de pre-grado de la especialidad de Primaria de la Escuela Profesional de Educación de la UNMSM, competencia que requieren para su capacitación como maestros de primaria?	Determinar el impacto de la metodología basada en estrategias didácticas para una enseñanza de la matemática centrada en la resolución de problemas propuesta en el sílabo "Didáctica de la Matemática III" en el rendimiento para resolver problemas, competencia que los alumnos de pre-grado de la especialidad de Primaria de la Escuela Profesional de Educación de la UNMSM requieren para su capacitación como maestros de primaria.	La metodología basada en estrategias didácticas para una enseñanza de la matemática centrada en la resolución de problemas planteada en el curso "Didáctica de la Matemática III" tiene un impacto en el rendimiento para resolver problemas matemáticos de 5º y6º grado, competencia que los alumnos de la especialidad de Primaria de la EAP de Educación de la UNMSM requieren para su capacitación como maestros de primaria.
1.2 **Sub problemas**	2.2 **Sub objetivos**	3.2 **Sub hipótesis**
a) ¿Están fundamentado el método y las estrategias propuestas para la resolución de problemas?	a) Fundamentar el método y las estrategias para una enseñanza de la matemática centrada en la resolución de problemas para el 5º y 6º grado.	a) El método propuesto está fundamentado tanto en sus bases teóricas como metodológicas.
b) ¿La metodología propuesta influye en el rendimiento para resolver problemas de los alumnos de Didáctica de la Matemática III de la especialidad de Primaria de la EAP de Educación de la UNMSM?	b) Aplicar un instrumento para evaluar el impacto del método en el rendimiento para resolver problemas en alumnos del curso "Didáctica de la Matemática III" de los grupos mencionados.	b) El rendimiento en resolución de problemas de los grupos mencionados, ha sido significativamente impactado por la metodología propuesta en el sílabo "Didáctica de la matemática III".

JUSTIFICACIÓN Y MOTIVACIÓN

4. La graduanda se ha desempeñado durante veinte años como profesora de aula de 5º y 6º grado y paralelamente ha capacitado docentes de primaria de estos grados, llegando a desarrollar un método centrado en problemas, que estos docentes han aplicado en su práctica diaria.

4.1. Con esa experiencia, desea probar si este método trabajado en las aulas de 5º y 6º en diversas realidades sociales, puede ser enseñando a los estudiantes de pre-grado de la EAP de Educación de la especialidad de primaria de la UNMSM que cursan "Didáctica de la Matemática III" para su futura aplicación en el aula.

4.2. Nos motiva ante todo sustentar las bases teóricas del método para una enseñanza centrada en la resolución de problemas (RP), como un pilar fundamental para la enseñanza de la matemática en el 5º y 6º grado..

4.3. En segundo lugar, nos anima difundir las estrategias creativas que servirían para mejorar las técnicas actuales de nuestro medio en RP.

4.4. En tercer lugar nos motiva fomentar una mayor variedad de problemas, difundiendo estrategias para los numerosos tipos posibles en los diversos campos conceptuales.

VARIABLES INDEPENDIENTES

Enseñanza de los conceptos básicos para aplicar una metodología centrada en la resolución de problemas (RP)

5.1.1. Desarrollo de los elementos que intervienen en la RP:

- Lenguaje usual
- Conceptos matemáticos
- Base de datos y modelos
- Herramientas estratégicas
- Cálculo mental
- Algoritmos

5.1.2 Pasos para la RP:

- Comprensión del texto y determinación de los datos y la incógnita.
- Representación del texto para elaborar la traducción al lenguaje matemático.
- Escritura y ejecución de las operaciones seleccionadas
- Respuesta, comprobación y memoria de las soluciones.

5.1.3 Uso de nuevas herramientas estratégicas para la RP

5.1.4 Presentación de los significados en los diversos campos conceptuales..

VARIABLE DEPENDIENTE

Rendimiento en la resolución de problemas matemáticos escolares de los diversos campos para 5º y 6º grado

LIMITACIONES

6.1. La metodología propuesta en el curso abarca tanto problemas de Aritmética como de Geometría, pero esta tesis se centrará en investigar sobre todo los aritméticos.

6.2. Asimismo, centrará su investigación en las competencias curriculares relativas a los conceptos y estrategias que el docente debe conocer para enseñar en 5º y 6º grado

6.3. Aún dentro de este sector delimitado, este estudio se focaliza en los campos conceptuales aditivo y multiplicativo.

POBLACIÓN

7.1. La investigación presentada se lleva a cabo con 115 universitarios y 51 escolares:

a) 20 alumnos de la Base 2003 UNMSM
b) 23 alumnos de Base 2002 UNMSM
c) 72 estudiantes de la UNEGV
d) 51 estudiantes del CPA A von Humboldt

TIPO DE INVESTIGACIÓN

8.1. La presente investigación pretende hacer uso de un diseño experimental con pruebas para 3 grupos experimentales y un grupo de control.

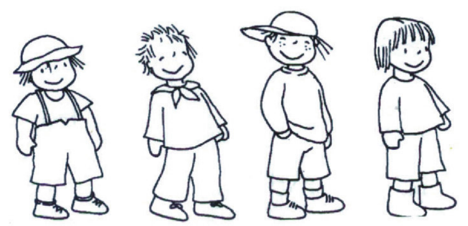
9.2. Para comprobar el avance de los grupos experimentales, se planificó un estudio trasversal., tendiente a certificar el avance de cada grupo en particular en relación a su propio punto de partida.

<table>
<tr><td colspan="2">UNMSM</td><td colspan="2">Fecha : 22-01-07</td><td>Porcent.</td><td colspan="2">Nota</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nombre</td><td>A. de Ferro</td><td>Puntaje</td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Notas Comparativas</td><td>20-19</td><td>18-17</td><td>16-14</td><td>13-11</td><td>10-08</td><td>07-05</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Prueba de Salida del Test de Razonamiento

Resuelve escribiendo las operaciones necesarias para evaluar la resolución de tu proceso y anota también la correspondiente respuesta en la unidad requerida. En algunos casos se te da indicaciones expresas que debes seguir anotando lo que se te solicita.

1. Escribe bajo su figura el nombre de cada niño sabiendo que:
   - Marco no tiene sombrero.
   - Luís no tiene sombrero ni pantalones largos.
   - Guillermo no tiene tirantes.
   - Juan no tiene camisetas de manga larga.



2. En clase los 28 alumnos son deportistas. Ellos hacen vóley o fútbol o ambos deportes. El equipo de vóley tiene 16 niños y el equipo de fútbol 20. ¿Cuántos niños juegan únicamente fútbol?

3. Donde el clima es cálido, crecen cactus y caucho mientras que brezos y matorrales desarrollan donde el clima es frío. Por otro lado, brezo y caucho necesitan humedad mientras que cactus y matorrales viven en regiones secas. Cerca de Río Branco hay mucho calor y humedad. ¿Qué plantas desarrollarían allí?

4. Carolina está enferma. Consultando al médico, éste afirma que si presenta manchas probablemente tenga varicela o sarampión o escarlatina y si presenta enfriamiento o tose quizá tenga tos convulsiva, escarlatina o paperas. Ella ha estornudado y tosido varios días y ahora comienzan aparecerle manchas en su cara. De acuerdo con el médico, ¿qué crees que tendrá?

5. Un vendedor de vino tiene solamente una medida donde caben justo 8 litros y otra donde entran exactamente 5 litros. ¿Cómo se las arregla para atender a un comprador que le pide 3 litros?

6. ¿Cuánto me costó un reloj que vendí en $ 96 perdiendo exactamente $ 8?

7. A Ricardo le dan 480 lápices. Decide venderlos en paquetes de 6. Si vende cada paquete en S/. 10, ¿cuánto dinero recibió?

8. Si una página tiene 25 renglones, cada renglón aproximadamente 60 caracteres y cada libro 40 páginas, ¿cuántos caracteres tiene aproximadamente dicho libro?

9. Una lámpara, una mesa y una alfombra costaron en total $300. Si la lámpara costó $ 100 y la mesa $ 45 más que la lámpara, ¿cuánto costó la alfombra?

10. En un corral hay 16 gallos y el número de gallinas es 4 veces mayor. Hay también 20 pollos y 15 conejos. ¿Cuántas aves hay en total?

11. La familia Pérez ha ahorrado S/. 300 para comprar y criar un perrito.
    Si el perrito cuesta S/. 250, las vacunas S/. 50, una correa S/. 40 y una casita
    S/. 60, ¿cuánto les falta ahorrar para completar el total de estos gastos?

12. Si tengo 20 madejas de lana y necesito 15 madejas para tejer una chompa, ¿cuántas madejas más que las que ya tengo me harán falta para tejer 3 chompas?

13. Compré 5 camisas iguales y un pantalón por $92. Si el pantalón costó $12, ¿cuánto costó cada camisa?

14. Compré 48 pantalones por $ 1200 y luego los vendí a $ 35. ¿Cuánto gané en la venta de cada pantalón?

15. Roberto vende casacas. El vendió 20 casacas por S/.180 cada una pero las había comprado invirtiendo S/. 3000 en total. ¿Cuánto ganó en la venta de cada casaca?

16. Media docena de cuadernos se vende a $ 10. ¿Cuánto costarán cuatro docenas y media?

17. Un camión transporta 30 sacos de arroz por viaje y realiza 4 viajes diarios. ¿En cuántos días transporta 720 sacos?

18. Pedro compra una máquina de escribir en $ 120 a pagar en cuotas. Si ya ha pagado 3 cuotas de $ 12, ¿cuántas cuotas de $ 12 le falta pagar?

19. Un avión debe recorrer 7200 km a una velocidad de 800 km por hora. Después de 5 horas de vuelo, ¿cuántos kilómetros le faltan para llegar a su destino?

20. Compré unos caballos en $ 4900 y luego los vendí en $ 6300. Si gané $ 200 en la venta de cada caballo, ¿cuántos caballos compré?

21. Pepe tiene 720 monedas antiguas de plata y 80 monedas de oro. Él decide cambiar todas sus monedas antiguas de plata por monedas de oro entregando 8 monedas antiguas de plata por 1 de oro. ¿Cuántas monedas de oro tendrá finalmente?

22. Una escuela tiene 56 aulas en 2 pisos pero en el 1º tiene 18 más que en el 2º, ¿cuántas aulas tiene en el segundo piso?

23. Después de haber gastado $ 250 en comprar una sombrilla y una silla de playa me sobraron $ 50. Como quise comprar otra silla tuve que regresar por $ 40 para poder hacerlo. ¿Cuánto me costaron la sombrilla y las dos sillas?

24. Determina el conjunto de los divisores de 8 y de los divisores de 16 y luego escribe V o F:
    a) Todos los divisores de 16 son divisores de 8. ( )
    b) Ningún divisor de 16 es divisor de 8. ( )
    c) No todos los divisores de 16 son divisores de 8. ( )
    d) Todos los divisores de 8 son divisores de 16 ( )

25. Un árbol de Navidad enciende su juego de luces cada 48 segundos y un nacimiento cada 36 segundos. Si se prenden al mismo tiempo, ¿cada cuántos segundos se encienden al mismo tiempo?

26. Un carpintero, tiene 3 listones de maderas de 90 cm, 150 cm y 180 cm, y quiere cortar piezas iguales del máximo tamaño posible aprovechando toda la madera. ¿Cuántos centímetros de largo medirá cada pieza?

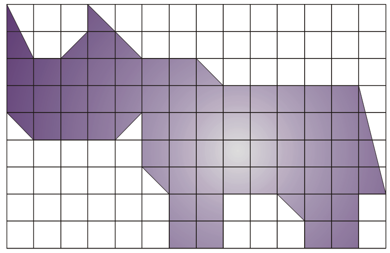
27. ¿Cuál es el doble de la diferencia entre 6 y 48?

28. ¿Cuál es la mitad del producto de 120 y 4?

29. ¿Cuánto le falta al cociente de 240 y 6 para llegar a 100?

30. ¿En cuánto excede 160 al triple del cociente de 350 y 7?

31. Calcula el número de cuadraditos que mide esta figura.



32. ¿Cuántos metros de alambre necesito para colocarlo alrededor de un jardín rectangular que tiene 10,5 m de largo y 5,25 m de ancho?

33. ¿Cuál es el ancho de un rectángulo cuyo perímetro es 36 m y cuyo largo es 10 m?

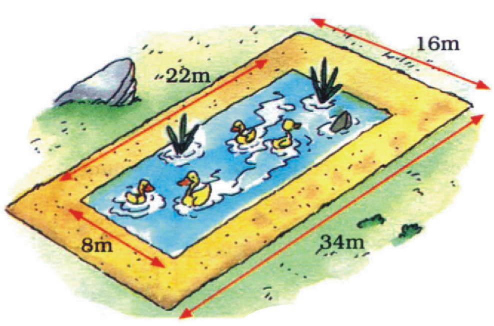
34. ¿Cuántos metros cuadrados de césped necesito colocar para una cancha rectangular de 8,5 m de largo y 5 m de ancho?

35. ¿Cuál es el largo de un rectángulo cuya área es 24 m^2 y su ancho 4 m?

36. ¿Cuál es el área de un cuadrado cuyo perímetro es 20 m?

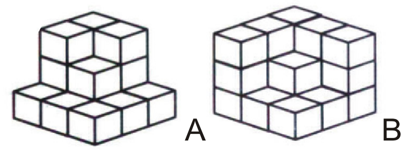
37. ¿Cuál es el perímetro de un cuadrado cuya área es de 100 m^2?

38. ¿Cuál es el área del terreno situado alrededor del estanque de patos?

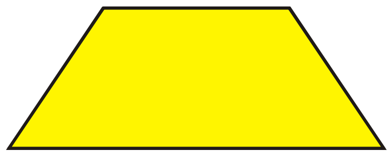


39. Las siguientes construcciones han sido hechas con cubos de 1 cm^3
Completa el volumen formado con los cubos colocados y el volumen que falta para completar un cubo en cada caso.

Construcción	A	B
Volumen		
Cubitos faltantes		



40. Doña Carolina tiene un solar trapezoidal. Quiere repartirlo entre sus cuatro hijos. A cada hijo le da un trozo idéntico de terreno. ¿Cómo lo puede hacer?



41. ¿Cuántos gramos son ¾ de 8 kg?

42. ¿Cuántos metros son 4/5 de 1 km?

43. Si aún tengo ¾ de mis 32 dientes, ¿cuántos dientes me faltan?

44. Si compro 200 g de carne ¿qué fracción de un kilogramo he comprado?

45. Si pago $ 800 que son los 2/5 del precio de un auto que he comprado, ¿cuánto dinero me cuesta el auto?

46. Ya han transcurrido 36 de los 45 minutos del primer tiempo del partido, ¿qué fracción del primer tiempo ha pasado?

47. ¿Cuántos botones de $ 0,80 se pueden comprar con $ 72?

48. Si con $ 45 puedo comprar 180 botones. ¿cuál es el precio de cada botón?

49. Si veo un paramecium de un tamaño de 7,5 mm con un microscopio de 100 aumentos, ¿cuál es su tamaño real?

50. ¿Cuántas bolsas de ¾ kg de arroz se pueden obtener de un saco de 19 ½ kg de arroz?

51. Si un auto recorre 180 km en 2 horas, ¿cuánto tardará en recorrer 630 km?

52. Si 100 g de pop corn cuestan $1,20 ¿cuánto cuestan 150 g? ¿por $ 3,60 cuántos gramos puedo comprar?

53. Si 5 m^3 de agua cuestan $ 5,50 ¿cuánto costarán 50 m^3?

54. Si en un mapa 2 cm representan 260 km, ¿cuál es la distancia real entre 2 ciudades distantes 3 cm en un mapa? ¿por cuántos centímetros represento dos ciudades que distan 1040 km?

55. ¿Cuántos votantes se presentaron en una mesa de 200 electores si acudió a la votación el 85% de ellos?

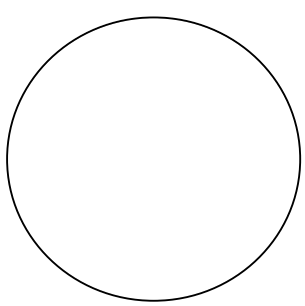
56. ¿Cuánto debo pagar por un televisor que costaba $ 1200 si ha sido rebajado en un 25%?

57. Un pasaje Lima-Miami costaba 600 más un impuesto de 20%.
¿Cuál es el precio total?

58. Si el 25% del peso de un paquete con una lámpara corresponde al envase que pesa 9 kg. ¿Cuál es el peso total del paquete?

59. El 18% del peso de una persona promedio corresponde al peso de sus huesos. Calcula el peso de Daniel si sus huesos pesan 9 kg.

60. Si debo representar en un diagrama circular el 20%, ¿con cuántos grados debo representarlo? Traza a pulso el sector circular que le correspondería.



SYLLABUS

I. INFORMACIÓN GENERAL

1.1. Asignatura : **Didáctica de la Matemática III**
1.2. Especialidad : Primaria
1.3. Código : EO31214
1.4. Pre-requisito : Didáctica de la matemática I y II
1.5. Semestre académico : Ciclo VII
1.6. Horas : 5 horas durante 17 semanas
1.7. Horario : martes de 4 a 7 pm y jueves de 8 a 10 pm.
1.8 Profesora : Mag. María Antonieta Ramírez de Ferro

II. SUMILLA

La presente asignatura permitirá al futuro docente de primaria conocer los fundamentos teóricos de un modelo de la Matemática de tendencia problémica y las estrategias didácticas para su aplicación práctica en el 5º y 6º grado de Educación Primaria.

III. OBJETIVOS

Generales

Al finalizar el curso el alumno será capaz de:
- Fundamentar los objetivos de la enseñanza problémica, especialmente de la nueva vertiente que enfoca el problema como centro de la clase de matemática
- Aplicar el método de la enseñanza problémica.

Específicos

Al finalizar el curso el alumno será capaz de:

- Conocer dos de las tendencias más significativas en la didáctica de la matemática: la tendencia cognitiva y el enfoque problémico.
- Determinar el concepto didáctico de problema matemático y los factores que intervienen en su resolución.
- Analizar los pasos para resolver un problema matemático.
- Aplicar una didáctica centrada en la resolución de problemas y conocer las herramientas estratégicas para trabajar en el campo de la lógica, en el campo de la numeración, en el campo aditivo y multiplicativo, y en el campo de la divisibilidad, las fracciones y decimales, la geometría y la proporcionalidad.

IV. CONTENIDOS

DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA III

1. Primera unidad: Nuevas tendencias en matemática

1.1. **Las dos tendencias innovadoras en matemáticas**

- 1.1.1. El enfoque cognitivo-constructivo.
- 1.1.2. Las dos vertientes actuales en el enfoque problémico

2. Segunda unidad: Elementos que intervienen en la resolución de problemas

- 2.1. ¿Qué es y qué no es la resolución de problemas?
- 2.2. Las premisas del texto y su significado en el lenguaje usual
  - 2.2.1. El lenguaje como barrera del problema
  - 2.2.2. Normas sobre la selección y escritura de problemas
- 2.3. Los términos que expresan conceptos matemáticos
- 2.4. La base de datos con problemas análogos
- 2.5. Las herramientas estratégicas para enfrentar problemas nuevos
- 2.6. Las reglas de los procedimientos para la ejecución de algoritmos
- 2.7. Las proposiciones de cálculo mental y las relativas a las propiedades para consolidar su dominio
  - 2.7.1. ¿Es imprescindible el uso del cálculo algorítmico?
  - 2.7.2. Los principios del cálculo mental como base para el dominio operativo:
    - a. El principio de analogía
    - b. El principio de descomposición
    - c. El principio de distribución
  - 2.7.3. Las formas de aplicación del cálculo mental

3. Tercera unidad: Los pasos recomendados para la solución de problemas

- 3.1. La comprensión del problema.
  - 3.1.1. La variable “términos del lenguaje usual”
  - 3.1.2. La variable “formato de presentación del problema”
  - 3.1.3. La variable “presentación de los datos”

- 3.2. La representación mental del problema para elaborar la traducción
  - 3.2.1. Las dos alternativas de trabajo
  - 3.2.2. Estimulando la representación de los datos
  - 3.2.3. La utilización de estrategias creativas

- 3.3. La ejecución de las operaciones seleccionadas
  - 3.3.1. ¿Algoritmo o cálculo mental?
  - 3.3.2. Utilizando la estimación previa

- 3.4. La respuesta, su comprobación y el análisis de la solución
  - 3.4.1. Aprendiendo del error
  - 3.4.2. La comprobación investigando nuevas rutas

4. **Cuarta unidad: El campo de la lógica**

4.1. Los diagramas de Venn y Euler
4.1.1. Problemas con las figuras geométricas
4.1.2. Problemas con intersecciones de dos clases
4.1.3. Pasando datos del cuadro de doble entrada al diagrama de Venn
4.2. El diagrama de Carroll Lewis para la clasificación
4.2.1. Problemas clasificando instrumentos
4.2.2. Problemas clasificando figuras geométricas y números
4.3. El diagrama de árbol y nuevo formato para la Criba de Eratóstenes
4.3.1. Presentación de los números primos y las reglas de divisibilidad
4.3.2. La descomposición con el diagrama de árbol
4.3.3. El diagrama de árbol para problemas de lógica combinatoria
4.4. El diagrama de flujo
4.4.1. El diagrama de flujo simple
4.4.2. Los diagramas de flujos complejos
4.4.3. El diagrama de flujo para actividades de la vida cotidiana

5. **Quinta unidad: El campo de la numeración**

5.1. El cuadro de valor posicional
5.2. Los diagramas de flechas
5.3. La recta numérica y la línea de tiempo
5.4. Cuadros de representación gráfica para interpretación de cifras
5.5. El diagrama de barras y el redondeo
5.6. Las tablas de frecuencias y el diagrama de doble barra
5.7. El diagrama de líneas y puntos
5.8. Cuadros para la escritura de números romanos
5.9. Cuadro de valor posicional para la escritura de números en base 2.
5.10. Ampliación del cuadro de valor posicional para las bases 3, 4 y 5.
5.11. Análisis de una prueba de evaluación para el campo de la numeración

6. **Sexta unidad: Problemas en el campo aditivo**

6.1. Adición y sustracción como operaciones contrarias
6.1.1. El uso de las máquinas
6.1.2. Cuadro de operaciones en cadena
6.1.3. El uso de las tablas
6.1.4. Los cuadros de doble entrada
6.2. Significados y problemas básicos en el campo aditivo.
6.2.1. Problemas de incremento
6.2.2. Problemas de resto o residuo
6.2.3. Problemas de combinación aditiva
6.2.4. Problemas de combinación sustractiva
6.2.5. Problemas de complemento aditivo y sustractivo
6.2.6. Problemas de comparación
6.2.7. Problemas de igualación

6.3. El dominio de la terminología técnica
6.3.1. Tabla para completar datos
6.3.2. Problemas utilizando la terminología técnica del campo aditivo
6.4. Uso de los paréntesis y corchetes
6.5. Técnica operativa de la sustracción
6.5.1. Fundamentación del algoritmo de la sustracción por complementación
6.5.2. Aplicación del algoritmo de la sustracción
6.5.3. Resolviendo operaciones en cadena
6.6. Las problemas con ecuaciones y aplicación de técnica operativa
6.7. Algunos problemas complejos en el campo aditivo
6.8. Análisis de una experiencia sobre la enseñanza de la suma y diferencia.
6.8.1 Análisis de un problema sobre la suma y diferencia.
6.8.2 La consolidación del aprendizaje.
6.8.3 Diagrama para una solución alternativa.
6.8.4 La algoritmización de la solución.
6.9. Como evaluar el dominio del cálculo mental y la RP en el campo aditivo
6.10. Algunos juegos para estimular el cálculo y el razonamiento

.**7. <u>Séptima unidad: Problemas en el campo multiplicativo</u>**.

7.1. Multiplicación y división como operaciones contrarias
7.1.1 El uso de las máquinas.
7.1.2 Cuadro de operaciones.
7.1.3 El uso de las tablas.
7.1.4 Los cuadros de doble entrada.
7.2. Ejercicios y problemas para el aprendizaje de la terminología técnica
7.3. Cómo aplicar las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva
7.4. Las reglas de ejecución de las operaciones combinadas
7.5. Significados y esquemas en el campo multiplicativo
7.5.1. Problemas de comparación
7.5.2. Problemas de proporcionalidad simple
7.5.3. Problemas de proporcionalidad compuesta
7.5.4. Problemas de proporcionalidad doble
7.6. La técnica operativa de la multiplicación
7.7. Presentación de la potencia
7.8. Técnica operativa de la división
7.8.1 El cálculo mental como base de la técnica operativa.
7.8.2 Introducción de la técnica operativa a través de problemas.
7.8.3 La práctica del algoritmo de la división entre una cifra.
7.8.4 La técnica operativa de dividir entre dos cifras de decenas netas.
7.8.5 La técnica operativa de dividir entre dos cifras de fácil estimación.
7.8.6 La técnica operativa de dividir en casos de difícil estimación.
7.9. Problemas complejos en el campo multiplicativo
7.10. Algunos juegos para estimular el cálculo y el razonamiento
7.11. Análisis de una evaluación sobre multiplicación y división

8. **<u>Octava unidad: Problemas y estrategias en el campo de la divisibilidad y las fracciones</u>**

8.1. Trabajando en el campo de la divisibilidad.

8.1.1. Presentación de los conjuntos de múltiplos y divisores.
8.1.2. Uso del diagramas de Venn para hallar el MCM y MCD
8.1.3. Un algoritmo alternativo para hallar el MCD y el MCM
8.1.4. Práctica del cálculo mental con el MCD y MCM
8.1.5. Problemas de MCD y MCM
8.1.6. Evaluación para 6º grado en el campo de la divisibilidad

8.2. Trabajando en los conceptos básicos para introducir las fracciones

8.2.1. El uso de los operadores fraccionarios para resolver problemas
8.2.2. La comprensión de las conversiones de fracciones a mixtos.
8.2.3. Fracciones en la recta numérica
8.2.4. Material didáctico y estrategias para el reconocimiento de las fracciones equivalentes.
8.2.5. La simplificación de fracciones
8.2.6. La amplificación de fracciones y sus múltiples aplicaciones
8.2.7. Determinación del porcentaje aplicando operadores fraccionarios.
8.2.8. Juegos para consolidar estos conceptos
8.2.9. Evaluación sobre los conceptos básicos para introducir fracciones

9. **<u>Novena unidad: Problemas en el campo aditivo de las fracciones</u>**

9.1. Estrategias y problemas para la adición y sustracción de fracciones
9.2. Problemas de terminología técnica para la adición y sustracción
9.3. Problemas complejos en el campo aditivo de las fracciones
9.4. Juegos didácticos para campo aditivo con fracciones
9.5. Dos evaluaciones propuestas para el tema.

10. **<u>Décima unidad: Problemas en el campo multiplicativo de las fracciones</u>**

10.1. Significados de la multiplicación de fracciones
10.2. Significados de la división de fracciones
10.3. Operaciones en cadena de multiplicación y división
10.4. Operaciones combinadas sin paréntesis
10.5. Operaciones combinadas con paréntesis
10.6. Fracciones complejas
10.7. Valor numérico
10.8. Ecuaciones
10.9. Problemas de terminología técnica
10.10. Problemas complejos con fracciones
10.11. Juegos didácticos con la multiplicación y división de fracciones
10.12. Evaluación en el campo multiplicativo de las fracciones.

11. Undécima unidad: Trabajando en el campo de los decimales

11.1 Los decimales y los números que miden
11.2 Los decimales en la recta numérica
11.3 El redondeo con números decimales
11.4 La conversión de fracciones a decimales y viceversa
    11.4.1 Conversión de decimales exactos.
    11.4.2 Conversión de fracciones a decimales periódicos puros y viceversa.
    11.4.3 Conversión de fracción a decimales periódicos mixtos y viceversa.
11.5 Cómo reconocer si las fracciones corresponden a decimales exactos
11.6 Problemas y estrategias de la adición y sustracción de decimales
11.7 Multiplicación y división de decimales por las potencias de 10
11.8 Estrategias y problemas con la multiplicación de decimales
11.9 El algoritmo de la división con decimales
    11.9.1 Un decimal entre un entero
    11.9.2 Un decimal entre otro decimal
11.10 Las operaciones combinadas y los problemas complejos con decimales
11.11 Juegos con números decimales.
11.12 Evaluación con números decimales

12. Duodécima unidad: Construcciones básicas de figuras geométricas y movimientos en el plano.

12.1 Diferencias entre los conceptos de: recta, semirrecta y segmento.
12.2 Una nueva aproximación al concepto de ángulo
12.3 Construcción de paralelas y perpendiculares
12.4 Construcción de la mediatriz de un segmento y la bisectriz de un ángulo.
12.5 Investigamos las figuras geométricas
12.6 Construcción de triángulos
12.7 Construcción de los paralelogramos
12.8 Los cuadriláteros en el cuadrante
12.9 El cálculo del perímetro, el área y el volumen
12.10 El movimiento de simetría
12.11 Los movimiento de traslación y rotación
12.12 Construcción de circunferencias y círculos
12.13 Evaluación en el campo de la geometría.

13. Décimo tercera unidad: Correspondencias directamente e inversamente proporcionales

13.1. Concepto de razón y proporción
13.2. Las tablas de correspondencias directamente proporcionales
13.3. Resolviendo una proporción directa aplicando regla de tres
13.4. Representación gráfica de una proporción directa
13.5. Determinando el factor de proporcionalidad directa
13.6. Porcentaje, la base y el tanto por ciento aplicando proporcionalidad directa
13.7. La proporcionalidad inversa
13.8. La representación gráfica de la proporcionalidad inversa
13.9. La constante en la proporcionalidad inversa
.

V. LINEAMIENTOS METODOLÓGICOS.

La asignatura se desarrollará en primer lugar mediante la exposición y el diálogo con los participantes y en segundo término a través de ejercicios prácticos y resolución de problemas en un fólder y un fichero de problemas que los estudiantes deberán desarrollar. Además los estudiantes deben preparar los materiales didácticos correspondientes a cada unidad y presentarlos en la Exposición anual de Didáctica de la Matemática.

VI. EQUIPOS Y MATERIALES

Como apoyo para los ejercicios y problemas se hará uso de separatas de autoría de la profesora, organizados en un fólder de 13 lecciones grabadas en DVD en el programa Page Maker. Este material incluye 10 temas curriculares básicos de 5º y 6º grado desarrollados a partir de problemas para introducir cada concepto vinculándolo a elementos de la vida cotidiana. Se propone además la elaboración de un fichero de problemas que cubran los diversos campos conceptuales presentados así como la confección de material didáctico. También disponemos de 12 videos de clases modelo para discutir la presentación más apropiada para cada tema.

VII. EVALUACIÓN

Se tomará una prueba de entrada para conocer el nivel alcanzado por el estudiante al iniciar el curso y compararlo con la prueba final. Por lo demás los alumnos estarán en condiciones de aprobar si:

a) Asisten puntualmente a clase y participan activamente	20%
b) Presentan el fólder anillado, el fichero de problemas y los materiales didácticos indicados para cada tema	30%
c) Obtienen notas aprobatorias en el examen parcial y final.	50%

VII. BIBLIOGRAFÍA GENERAL

Meyer, Richard. **Pensamiento, resolución de problemas y cognición**. Paidós, Barcelona, 1986.
Polya, Georg. **Cómo plantear y resolver problemas**. Ed. Trillas. México, 1974.
Pena, Mónica. **El problema**. Sumar, restar, multiplicar y dividir. Las estructuras aditiva y multiplicativa. 300 problemas para niños. Homo Sapiens. Rosario, 2003.
Maza Gómez, Carlos. **Sumar y restar. El proceso de enseñanza /aprendizaje de la suma y resta**. Editorial Visor, Madrid 1989.
Maza Gómez, Carlos. **Multiplicar y dividir a través de la resolución de problemas**. Editorial Visor, Madrid, 1991.
Fernández Bravo, José Antonio. **Técnicas creativas para la resolución de problemas**. Ed. CISSPRAXIS, Barcelona, 2000.
K. Stacey y S. Groves. **Resolver problemas: Estrategias.** Unidades para desarrollar el razonamiento matemático. Narcea, Madrid, 2001.
Cofré, Alicia y Tapia, Lucila. **Como desarrollar el razonamiento lógico-matemático.** Ed. Universitaria, Chile, 1998.
García Madruga, Juan A. "Resolución de problemas" en **La resolución de problemas en matemáticas**. Ed Graó, Barcelona, 2002.
Henson, Kenneth T. "Solución de problemas, creatividad y constructivismo" en **Psicología educativa para la enseñanza eficaz**. Thomson Editores, México, 2000.
Puig Luis. **Problemas aritméticos escolares.** Ed. Síntesis, Madrid, 1995.

<u>Bibliografía para la consulta de temas del currículo</u>

Apoyo. **Matemáticas para todos 5.** Ed. Apoyo, Lima, 2004.
Apoyo. **Matemáticas para todos 6.** Ed. Apoyo, Lima, 2004.

<u>Bibliografía de la profesora sobre la metodología de 5º y 6º</u>

Antonieta de Ferro **"Didáctica de la matemática III"** Curso en DVD, 2007
Antonieta de Ferro. **Niño y número 5º,** Ed. Brasa, Lima 1992
Antonieta de Ferro **Niño y número 6º,** Ed.Brasa, Lima, 1992**.**
Antonieta de Ferro. **Guía Niño y número 5º**. Editorial Monterrico, Lima, 1992.
Antonieta de Ferro. **Pati juega y razona 6º**. Minedu, Biblioteca Básica del profesor. Ed. Brasa, Lima 1999
Antonieta de Ferro. **Matemática 5º** para el área lógico matem. Ed. IBE, Lima, 2002.
Antonieta de Ferro. **Matemática 6º** para el área lógico matem. Ed. IBE, Lima, 2002
Antonieta de Ferro. **Nico juega con la matemática 5º** Editorial IBE Lima, 2004
Antonieta de Ferro. **Nico juega con la matemática 6º** Editorial Brasa, Lima, 1994.
Antonieta de Ferro. **Matemática 5º.** Ed. EULA, Lima, 2007 (En prensa)
Antonieta de Ferro. **Matemática 6º**. Ed EULA, Lima 2007 (En preparación)

Bibliografía

8.1 Bibliografia básica sobre problemas

Dante, Luiz Roberto. **Didática da resolução de problemas de matemática**. Atica, São Paolo, 1991.

Fernández Bravo, José Antonio. **Técnicas creativas para la resolución de problemas**. Ed. CISSPRAXIS, Barcelona, 2000.

García Madruga, Juan A. "Resolución de problemas" en **La resolución de problemas en matemáticas**. Ed Graó, Barcelona, 2002.

Maza Gómez, Carlos. **Sumar y restar. El proceso de enseñanza /aprendizaje de la suma y resta**. Editorial Visor, Madrid 1989.

Maza Gómez, Carlos. **Multiplicar y dividir a través de la resolución de problemas**. Editorial Visor, Madrid, 1991.

Meyer, Richard. **Pensamiento, resolución de problemas y cognición**. Paidós, Barcelona, 1986.

Pena, Mónica. **El problema**. Sumar, restar, multiplicar y dividir. Las estructuras aditiva y multiplicativa. 300 problemas para niños. Ed. Homo Sapiens. Rosario, 2003.

Polya, Georg. **Cómo plantear y resolver problemas**. Ed. Trillas. México, 1974.

Pozo, Juan Ignacio y otros. **La solución de problemas**. Ed. Santilllana, Aula XXI, Madrid, 1999.

Puig Luis. **Problemas aritméticos escolares.** Ed. Síntesis, Madrid, 1995.

Segarra, Lluis. **Problemates**. Colección de problemas para todas las edades. Ed. Graó, Barcelona, 2001.

Stacey K. y Groves S. **Resolver problemas: Estrategias.** Unidades para desarrollar el razonamiento matemático. Narcea, Madrid, 2001.

8.2 Bibliografía sobre psicología y didáctica del aprendizaje matemático

Alcalá, Manuel. **La construcción del lenguaje matemático.** Ed. Graó, Barcelona, 2002.

Baron, Robert A. **Psicología.** Ed. Prentice Hall, México, 1996.

Cofré, Alicia y Tapia, Lucila. **Como desarrollar el razonamiento lógico-matemático.** Ed. Universitaria, Chile, 1998.

Chamorro, Ma. Del Carmen. **Didáctica de las matemáticas para primaria.** Pearson, México, 2005.

Gallego Lázaro, Carlos. **Repensar el aprendizaje de las matemáticas**. Ed. Graó, Barcelona, 2005.

Henson, Kenneth T. “Solución de problemas, creatividad y constructivismo” en **Psicología educativa para la enseñanza eficaz**. Thomson Editores, México, 2000.

Hernández,F. y Soriano, E. **Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la Educación Primaria**. Ed. La Muralla, Madrid, 1999.

Orton, Anthony. **Didáctica de las matemáticas**. Morata, Madrid, 1998.

Palacio Peña, Joaquín. **Didáctica de la matemática: búsqueda de relaciones y contextualización de problemas.** Fondo Ed. Del Pedagógico de San Marcos, Lima, 2003.

Santaló, Luis, Llinares, Salvador y otros. **La enseñanza de la matemática en la Educación Intermedia.** Ed. Rialp, Madrid, 1994.

Skemp R. **Psicología del aprendizaje de las matemáticas**. Ed. Morata, Madrid, 1999.

Vila, Antoni y Luz Callejo. **Matemáticas para aprender a pensar**. Ed. Nancea, Madrid, 2004.

8.3 Metodología de la investigación educativa.

Flores Ochoa, Rafael y Tobón Restrepo, Alonso. **Investigación educativa y pedagógica.** Ed. Mc Graw Hill, Bogotá, 2001.

Flores Ochoa, Rafael. **Evaluación pedagógica y cognición**. Ed. Mc Graw Hill, Bogotá, 2001.

Hernández, Roberto y Fernández, Carlos. **Metodología de la investigación**. Ed. Mc Graw Hill, México, 1991.

Kushner, Saville. **Personalizar la evaluación.** Ed. Morata, Madrid, 2002.

Pérez Juste R. y otros. **Hacia una educación de calidad. Gestión, instrumentos y evaluación.** Ed. Narcea, Madrid, 2001.

Weiss, Carol H.. **Investigación evaluativa**. Ed. Trillas, México, 1991.

Wittrock, Merlin C. **La investigación de la enseñanza I, II y III** Ed. Paidós, Barcelona, 1997.

Carrasco J.L., Huerta M. **Estadística multivariante en las ciencias de la vida, Fundamentos, métodos y aplicación** Madrid – España, año 1993.

Crivisqui E., **Análisis Factorial de Correspondencias, un instrumento de investigación en ciencias sociales**. Centro de Publicaciones Universidad Nacional "Nuestra Señora de la Asunción", Julio 1993 Asunción - Paraguay.

HAIR J., ANDERSON R., TATAHM R., BLACK W., **Análisis Multivariante** *5ta Edición*, Prentice may, Madrid – España, año 1999.

NEIL J. Salkind, **Métodos de Investigación** 3era Edición, Prentice, México 1999.

PEDRET R., SAGNIER L, CAMP F. **Herramientas para segmentar mercados y posicionar productos, análisis de información cuantitativa en investigación comercial** Ediciones Deusto SA, Barcelona España Año 2000.

PEÑA D. **Análisis de Datos Multivariantes**. Editorial McGraw-Hill Interamericana de España S.A.U. Madrid – España, año 2002.

VISAUTA B., MARTORI J., **Análisis Estadístico con SPSS para Windows *Vol. II* Estadística Multivariada** 2da Edición, Madrid – España, Año 2003.

8.4. Bibliografía de la autora

Antonieta Ramírez de Ferro. **Impacto de la metodología cognitivo-constructiva** desarrollada en el curso "Didáctica de la Matemática I" en el aprendizaje de los conceptos lógico-matemáticos en estudiantes de pre-grado de la Especialidad de Primaria de la EAP de la Facultad de Educación de la UNMSM, Lima, 2006.

Antonieta Ramírez de Ferro. **Curso Didáctica de la Matemática III**, Lima, 2007.

Antonieta de Ferro. **Niño y número 5º,** Ed. Brasa, Lima 1992
Antonieta de Ferro **Niño y número 6º,** Ed.Brasa, Lima, 1992**.**
Antonieta de Ferro. **Guía Niño y número 5º**. Editorial Monterrico, Lima, 1992.
Antonieta de Ferro. **Pati juega y razona 6º**. Minedu, Biblioteca Básica del profesor. Ed. Brasa, Lima 1999
Antonieta de Ferro. **Matemática 3º** para el área lógico matem. Ed. IBE, Lima, 2002.
Antonieta de Ferro. **Matemática 4º** para el área lógico matem. Ed. IBE, Lima, 2002
Antonieta de Ferro. **Matemática 5º** para el área lógico matem. Ed. IBE, Lima, 2002.
Antonieta de Ferro. **Matemática 6º** para el área lógico matem. Ed. IBE, Lima, 2002
Antonieta de Ferro. **Nico juega con la matemática 3º** Editorial IBE Lima, 2004
Antonieta de Ferro. **Nico juega con la matemática 4º** Editorial Brasa, Lima, 1994.
Antonieta de Ferro. **Nico juega con la matemática 5º** Editorial IBE Lima, 2004
Antonieta de Ferro. **Nico juega con la matemática 6º** Editorial Brasa, Lima, 1994.
Antonieta de Ferro. **Matemática 5º.** Ed. EULA, Lima, 2007 (En edición de validación)
Antonieta de Ferro. **Matemática 6º**. Ed EULA, Lima 2007 (En edición de validación)